КРАТКИЙ КУРС АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Н.В.Ефимов

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К ШЕСТОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании произведены следующие изменения:

1. Значительно сокращена глава 6, посвященная общему уравнению линии второго порядка. Дело в том, что приведение к каноническому виду такого уравнения само по себе является вполне простой задачей; кроме того, эта задача не настолько часто встречается, чтобы имело смысл запоминать для нее готовые формулы. Поэтому здесь достаточно разъяснить сущность метода, что и сделано.

2. В конце главы 8 добавлены два небольших пункта о разложении вектора по косому базису.

3. Несколько упрощено изложение отдельных мест главы 13.

4. Исключен материал, содержащийся в §§ 77—81 предыдущего издания (приведение к каноническому виду общего уравнения поверхности второго порядка).

Таким образом, в книге оставлены лишь те вопросы, которые соответствуют основным разделам программы по математике для высших технических учебных заведений в части аналитической геометрии и теории определителей.

Теперь по поводу произведенных сокращений. Они касаются общей теории кривых и поверхностей второго порядка. Изложение этих вопросов в предыдущем издании книги ориентировалось только на решение определенных задач аналитической геометрии. Между тем, для приложений требуются многие вопросы алгебры, которые тесно связаны с аналитической геометрией. Поэтому аналитическую геометрию следует излагать так, чтобы важные алгебраические понятия получили в ней достаточную акцентировку. В частности, в теории кривых и поверхностей второго порядка должны получить достаточное освещение основные свойства квадратичных форм. Сюда примыкают также линейные преобразования и матрицы. Все эти вопросы изложены нами в отдельной небольшой книжке («Квадратичные формы и матрицы»), которая издается в серии «Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов».

28 декабря 1961 г. ***Н. Ефимов***

Настоящее (десятое) издание не отличается от предыдущего (1967г.)

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

ГЛАВА 1

КООРДИНАТЫ НА ПРЯМОЙ И НА ПЛОСКОСТИ

§ 1. Ось и отрезки оси

1. Рассмотрим произвольную прямую. Она имеет два взаимно противоположных направления. Изберем по своему желанию одно из них и назовем его положительным (а противоположное направление — отрицательным).

Прямую, на которой «назначено» положительное направление, мы будем называть *осью*. На чертежах положительное направление оси указывается стрелкой (см., например, рис. 1, где изображена ось a).

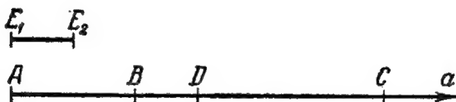


Рис. 1.

2. Пусть дана какая-нибудь ось и, кроме того, указан *масштабный отрезок*, т. е. линейная единица, с помощью которой любой отрезок может быть измерен и тем самым для любого отрезка может быть определена его длина.

Возьмем на данной оси две произвольные точки и пометим их буквами A, B. *Отрезок, ограниченный точками A, B, называется направленным, если сказано, какая из этих точек считается началом отрезка, какая концом. Направлением отрезка считается направление от начала к концу.*

В дальнейшем тексте направленный отрезок обозначается двумя буквами с чертой над ними, именно теми же буквами, какими помечены ограничивающие его точки; при этом буква, которой помечено начало, ставится на первом месте. Таким

образом, $\overline{AB}$ обозначает направленный отрезок, ограниченный точками A, B, началом которого является точка A; $\overline{BA}$ обозначает направленный отрезок, ограниченный точками A, B, началом которого является точка B.

В дальнейшем, рассматривая направленные отрезки оси, мы часто будем называть их просто отрезками, опуская слово «направленный».

Условимся называть величиной отрезка $\overline{AB}$ *некоторой оси число, равное его длине, взятой со знаком плюс, если направление этого отрезка совпадает с положительным направлением оси, и со знаком минус, если оно совпадает с отрицательным направлением оси.* Величину отрезка $\overline{AB}$ мы будем обозначать символом AB (без черты). Мы не исключаем случая, когда точки A и B совпадают; тогда отрезок $\overline{AB}$ называется *нулевым,* так как величина его AB равна нулю. Направление нулевого отрезка неопределенно и, таким образом, называть такой отрезок направленным можно лишь условно.

Величина отрезка, в отличие от его длины, есть число *относительное*; очевидно, длина отрезка есть модуль его величины*), поэтому, в согласии с принятым в алгебре способом обозначать модуль числа, для обозначения длины отрезка $\overline{AB}$ мы будем употреблять символ $|AB|$. Ясно, что $|AB|$ и $|BA|$ обозначают одно и то же число. Напротив, сами величины AB и BA отличаются знаком, так что

$$AB = -BA.$$

На рис. 1 изображены ось a и на ней точки A, B, C, D; E_1E_2 — масштабный отрезок. Точки A, B, C, D предполагаются расположенными так, что расстояние между A и B равно двум, между C и D — трем. Направление от A к B совпадает с положительным направлением оси, направление от C к D противоположно положительному направлению оси. В данном случае мы имеем, следовательно,

$$AB = 2, \quad CD = -3,$$

или

$$BA = -2, \quad DC = 3.$$

---

*) Слово «модуль» означает то же, что и «абсолютная величина».

Кроме того, можно написать

$$|AB| = 2, \quad |CD| = 3.$$

3. *При любом расположении точек A, B, C на оси величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$ связаны соотношением*

$$AB + BC = AC; \tag{1}$$

это соотношение мы будем называть *основным тождеством.*

Докажем основное тождество. Предположим сначала, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, будучи ненулевыми, имеют одинаковые направления (рис. 2, верх); тогда отрезок $\overline{AC}$ имеет длину, равную сумме длин отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и направлен одинаково с ними. В этом случае все три числа AB, BC и AC имеют одинаковые знаки и число AC равно сумме чисел AB, BC, т. е. тождество (1) справедливо.

Предположим теперь, что отрезки $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, будучи ненулевыми, имеют разные направления (рис. 2, низ). Тогда отрезок $\overline{AC}$ имеет длину, равную разности длин отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и направлен так же, как более длинный из них. В этом



Рис. 2.

случае числа AB и BC имеют разные знаки, а число AC имеет модуль, равный разности модулей чисел AB, BC, и знак, совпадающий со знаком того из этих чисел, модуль которого больше. Следовательно, по правилу сложения относительных чисел и при таком расположении точек число AC равно сумме чисел AB, BC, т. е. тождество (1) справедливо.

Предположим, наконец, что какой-нибудь из отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ — нулевой. Если $\overline{AB}$ — нулевой отрезок, то точка B совпадает с точкой A, следовательно,

$$AB + BC = AA + AC = 0 + AC = AC.$$

Если $\overline{BC}$ — нулевой отрезок, то точка B совпадает с точкой C, следовательно,

$$AB + BC = AC + CC = AC + 0 = AC.$$

Итак, тождество (1) действительно справедливо при всех расположениях точек A, B, C.

Замечание. Если бы в соотношении (1) символы AB, BC и AC считались просто длинами соответствующих отрезков (без учета знаков!), то оно было бы верно только тогда, когда точка B лежит между точками A и C. Универсальность соотношения (1) имеет своим источником именно то обстоятельство, что AB, BC и AC в нем понимаются как величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$, т. е. как длины их, взятые с надлежащими знаками*).

§ 2. Координаты на прямой. Числовая ось

4. Мы укажем здесь способ, с помощью которого положение точек на произвольно выбранной прямой можно определять заданием чисел.

Пусть дана произвольная прямая a. Выберем некоторый отрезок в качестве линейной единицы, назначим на прямой a положительное направление (благодаря чему она станет осью) и отметим на этой прямой буквой O какую-нибудь точку.

После этого *условимся называть координатой любой точки M на оси a величину отрезка $\overline{OM}$. Точку O будем называть началом координат; ее собственная координата равна нулю.*

Заданием координаты точки M положение этой точки на данной прямой определяется вполне. Именно, модуль координаты, т. е. OM, есть расстояние точки M от (заранее фиксированной) точки O, а знак координаты, т. е. знак числа OM, устанавливает, в каком направлении от точки O расположена точка M; если координата положительна, то точка M расположена в положительном направлении от точки O, если отрицательна,— то в отрицательном, если же координата равна нулю, то точка M совпадает с точкой O (все это непо-

---

*) Если отрезки не лежат на какой-либо оси, а рассматриваются как произвольные отрезки на плоскости, то нет оснований условно приписывать их длинам тот или иной знак. В таких случаях длины отрезков можно обозначать как в элементарной геометрии, без символа модуля, что мы и будем часто делать в дальнейшем (см., например, n° 40, где длина отрезка обозначена через CM вместо $|CM|$).

средственно следует из определения величины отрезка оси; см. n° 2).

Представим себе, что прямая a расположена перед нами горизонтально и положительно направлена в правую сторону. Тогда расположение точек прямой a, в зависимости от знака их координат, может быть описано следующим образом; точки, имеющие положительные координаты, лежат справа от начала координат O, а точки, имеющие отрицательные координаты, — слева от начала координат O.

Координату произвольной точки обычно обозначают буквой x. В тех случаях, когда рассматривается несколько точек, их часто обозначают одной буквой с разными номерами, например, $M_1, M_2, \ldots, M_n$; координаты этих точек тогда также обозначают одной буквой с соответствующими номерами $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Желая кратко указать, что данная точка имеет данную координату, записывают эту координату в круглых скобках рядом с обозначением самой точки, например: $M_1(x_1)$, $M_2(x_2)$, ..., $M_n(x_n)$.

5. Здесь мы докажем две простые, но важные теоремы. Они относятся к оси, на которой введена координатная система.

Теорема 1. *Каковы бы ни были две точки оси $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$, всегда имеет место равенство*

$$M_1M_2 = x_2 - x_1. \quad (1)$$

Доказательство. Вследствие основного тождества (n° 3)

$$OM_1 + M_1M_2 = OM_2,$$

откуда

$$M_1M_2 = OM_2 - OM_1.$$

Но $OM_2 = x_2$, $OM_1 = x_1$, следовательно,

$$M_1M_2 = x_2 - x_1,$$

что и требовалось доказать.

Сущность этой теоремы можно высказать такими словами: *чтобы получить величину отрезка оси, нужно от координаты его конца отнять координату начала.* (См. рис. 3 и 4; в случае рис. 4 необходимо учесть, что координата x_1 отрицательна.)

Теорема 2. *Если $M_1(x_1)$ и $M_2(x_2)$ — любые две точки оси и d — расстояние между ними, то*

$$d = |x_2 - x_1|. \quad (2)$$

Доказательство. Согласно предыдущей теореме

$$M_1M_2 = x_2 - x_1;$$

но расстояние между точками M_1, M_2 есть модуль величины отрезка $\overline{M_1M_2}$, следовательно,

$$d = |x_2 - x_1|.$$

Теорема доказана.

Замечание. Так как числа $x_2 - x_1$ и $x_1 - x_2$ имеют общий модуль, то с равным правом можно писать $d = |x_2 - x_1|$ и $d = |x_1 - x_2|$.

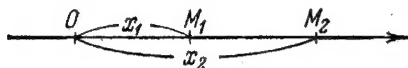


Рис. 3.

Приняв это во внимание, мы можем выразить смысл доказанной теоремы так: *чтобы вычислить расстояние между двумя точками оси, нужно от координаты одной из них отнять координату другой и взять модуль полученной разности.*



Рис. 4.

Пример 1. Даны точки $A(5)$, $B(-1)$, $C(-8)$, $D(2)$; найти величины отрезков $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DB}$.

Решение. На основании теоремы 1 имеем:

$$AB = -1 - 5 = -6,$$
$$CD = 2 - (-8) = 10,$$
$$DB = -1 - 2 = -3.$$

Пример 2. Найти расстояние между точками $P(3)$ и $Q(-2)$.

Решение. На основании теоремы 2

$$d = |-2 - 3| = |-5| = 5.$$

6. Если на какой-нибудь оси введена координатная система, то каждая точка этой оси имеет одну вполне определенную координату. Обратно, какое бы мы ни взяли (вещественное) число x, на оси найдется одна вполне определенная точка M с данной координатой x.

Условимся говорить, что точка M *изображает* число x. Ось, на которой введены координаты по способу, описанному в п° 4, так что ее точки изображают все вещественные числа, называется *числовой осью*. На рис. 5 изображены числовая ось и несколько целых чисел.

Условившись изображать числа в виде точек числовой оси, мы тем самым делаем геометрически наглядным наше



Рис. 5.

представление о всех числах в их совокупности. Вместе с тем мы получаем возможность формулировать в геометрических терминах арифметические соотношения. Например, все решения неравенств $3 < x < 5$ можно наглядно представить себе в виде точек числовой оси, расположенных между двумя ее точками, из которых одна изображает число 3 (т. е. имеет координату, равную 3), другая — число 5 (т. е. имеет координату, равную 5). Это обстоятельство можно коротко выразить так: неравенства $3 < x < 5$ определяют интервал (числовой оси), ограниченный точками 3 и 5.

Выражение арифметических соотношений геометрическими терминами оказалось весьма удобным и постоянно употребляется во всех разделах математики.

§ 3. Декартовы прямоугольные координаты на плоскости. Понятие о декартовых косоугольных координатах

7. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек плоскости заданием чисел, то говорят, что на плоскости введена *система координат*. Мы рассмотрим сейчас простейшую и наиболее употребительную систему координат, которая называется д е к а р т о в о й п р я м о у г о л ь н о й.

Декартова прямоугольная система координат определяется заданием линейной единицы для измерения длин и двух взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в какой-нибудь порядке (т. е. указано, какая из них считается первой, а какая — второй). Точка пересечения осей называется *началом координат*, а сами оси — *координатными осями*,

причем первую из них называют также *осью абсцисс*, а вторую — *осью ординат*.

Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — буквами Ox и ось ординат — буквами Oy. На чертежах буквы x, y ставятся около соответственных осей в положительном направлении от точки O в том месте, где изображения осей обрываются; таким образом, само расположение букв O и x на чертеже указывает, куда направлена ось абсцисс, а расположение букв O и y — куда направлена ось ординат. Тем самым отпадает надобность указывать положительные направления осей стрелками, поэтому в дальнейшем на наших чертежах стрелки на координатных осях не ставятся.

Пусть M — произвольная точка плоскости. Спроектируем точку M на координатные оси, т. е. проведем через M перпендикуляры к прямым Ox и Oy; основания этих перпендикуляров обозначим соответственно M_x и M_y (рис. 6).

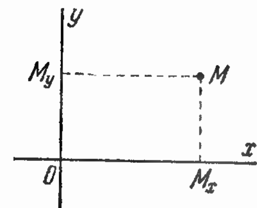


Рис. 6.

Координатами точки M в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \tag{1}$$

где OM_x означает величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси абсцисс, OM_y — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси ординат. Число x называется первой координатой или абсциссой точки M, число y называется второй координатой или ординатой точки M. Желая кратко указать, что точка M имеет абсциссу x и ординату y, пользуются записью: $M(x; y)$. Если нам придется рассматривать несколько точек, то мы часто будем обозначать их одной буквой с разными номерами, например, $M_1, M_2, \ldots, M_n$; тогда координаты этих точек мы будем помечать соответствующими номерами и записывать рассматриваемые точки так: $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \ldots, M_n(x_n; y_n)$.

8. Если задана система декартовых прямоугольных координат, то каждая точка плоскости в этой системе имеет одну вполне определенную пару координат x, y. Обратно, каковы бы ни были два (вещественных) числа x, y, на плоскости найдется одна вполне определенная точка, абсцисса которой в данной системе есть x, а ордината есть y. Чтобы построить

точку по ее координатам x, y, нужно на оси абсцисс отложить от начала координат отрезок $\overline{OM_x}$, величина которого равна x, а на оси ординат — отрезок $\overline{OM_y}$, величина которого равна y (направления, в которых следует откладывать эти отрезки, определяются знаками чисел x, y); после этого, проводя через M_x прямую, параллельную оси Oy, и через M_y — прямую, параллельную оси Ox, мы найдем искомую точку M как точку пересечения проведенных прямых.

9. В n°4 мы объяснили, как вводится система координат на прямой. Введем теперь на каждой из координатных осей Ox и Oy систему координат, сохранив данную нам линейную единицу и данные направления осей Ox и Oy, а в качестве начала координат на каждой оси выбрав точку O.

Рассмотрим произвольную точку M и ее проекцию M_x на ось Ox.

Точка M_x имеет на оси Ox координату, равную величине отрезка $\overline{OM_x}$; эта же величина названа нами (в n° 7) абсциссой точки M. Отсюда можно заключить: *абсцисса точки M равна координате точки M_x на оси Ox*. Аналогично: *ордината точки M равна координате точки M_y на оси Oy*. Эти предложения при всей их очевидности являются для нас весьма важными. Именно, они дают право при рассмотрении точек на плоскости применять теоремы 1 и 2 (n° 5), выражающие известные свойства координатной системы на прямой.

10. Чтобы удобнее формулировать последующие факты, мы условимся сейчас насчет некоторых терминов.

Ось Oy разделяет всю плоскость на две полуплоскости; ту из них, которая расположена в положительном направлении оси Ox, мы назовем *правой*, другую — *левой*.

Точно так же ось Ox разделяет плоскость на две полуплоскости; ту из них, которая расположена в положительном направлении оси Oy, мы будем называть *верхней*, другую — *нижней* *).

11. Пусть M — произвольная точка правой полуплоскости; тогда отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox положительное направление, и, следовательно, абсцисса $x = OM_x$ точки M

*) Такие названия оправдываются тем, что на чертежах координатные оси обычно располагаются так, чтобы при рассмотрении их ось Ox была видна направленной вправо, а ось Oy — вверх.

положительна. Если же M находится в левой полуплоскости, то отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox отрицательное направление, и число $x = OM_x$ отрицательно. Наконец, в том случае, когда точка M лежит на оси Oy, ее проекция M_x на ось Ox совпадает с точкой O и $x = OM_x$ есть нуль.

Таким образом, *все точки правой полуплоскости имеют положительные абсциссы* ($x > 0$), *все точки левой полуплоскости имеют отрицательные абсциссы* ($x < 0$); *абсциссы точек, лежащих на оси* Oy, *равны нулю* ($x = 0$).

Аналогично рассуждая, установим, что *все точки верхней полуплоскости имеют положительные ординаты* ($y > 0$), *все точки нижней полуплоскости имеют отрицательные ординаты* ($y < 0$); *ординаты точек, лежащих на оси* Ox, *равны нулю* ($y = 0$).

Заметим, что у начала координат O, как точки пересечения осей, обе координаты равны нулю: $x = 0$, $y = 0$, и этим оно характеризуется (т. е. обе координаты равны нулю т о л ь к о для точки O).

12. Две координатные оси вместе разделяют плоскость на четыре части; их называют *координатными четвертями* и нумеруют по определенному правилу. Именно — первой координатной четвертью называется та, которая лежит одновременно в правой и верхней полуплоскостях, второй — лежащая в левой и в верхней полуплоскостях, третьей — лежащая в левой и в нижней полуплоскостях, наконец, четвертой четвертью называется та, которая лежит в правой и в нижней полуплоскостях. (Нумерация координатных четвертей показана на рис. 7.)

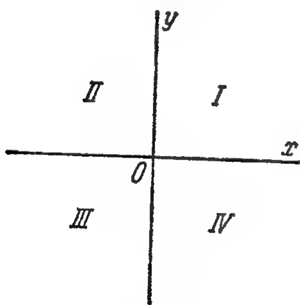


Рис. 7.

Пусть M — некоторая точка с координатами x, y. Из предыдущего следует, что

если $x > 0$, $y > 0$, то M лежит в первой четверти,
если $x < 0$, $y > 0$, то M лежит во второй четверти,
если $x < 0$, $y < 0$, то M лежит в третьей четверти,
если $x > 0$, $y < 0$, то M лежит в четвертой четверти.

Рассмотрение координатных полуплоскостей и четвертей полезно тем, что помогает легко ориентироваться в расположении заданных точек по знакам их координат.

13. Мы познакомились с декартовой прямоугольной системой координат. Эта система наиболее употребительна. Однако в отдельных случаях, при рассмотрении специальных задач, могут оказаться более удобными и другие системы. Расскажем в немногих словах о декартовых координатах с любым углом между осями.

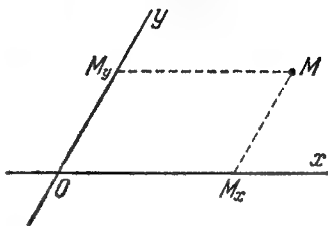


Рис. 8.

Такая система координат определяется заданием масштаба и двух осей Ox, Oy, пересекающихся в точке O под любым углом (кроме 0 и 180°). Пусть M — произвольная точка плоскости. Проведем через M прямые, параллельные осям Ox, Oy, и обозначим точки их пересечения с этими осями соответственно через M_x и M_y (рис. 8).

Координатами точки M в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y,$$

где OM_x означает величину отрезка $\overline{OM_x}$ оси Ox, а OM_y — величину отрезка $\overline{OM_y}$ оси Oy.

В том частном случае, когда угол между осями Ox, Oy равен прямому, описанная сейчас система координат оказывается декартовой прямоугольной системой. Если же угол между осями Ox, Oy не прямой, то эта система координат называется декартовой косоугольной. В нашей книге в дальнейшем декартовы косоугольные координаты не употребляются. Поэтому декартовы прямоугольные координаты мы будем часто называть просто декартовыми координатами.

§ 4. Полярные координаты

14. Здесь мы опишем так называемую *полярную систему координат*; она весьма удобна и применяется довольно часто.

Полярная система координат определяется заданием некоторой точки O, называемой *полюсом*, исходящего из этой

точки луча OA, называемого *полярной осью*, и масштаба для измерения длин. Кроме того, при задании полярной системы должно быть сказано, какие повороты вокруг точки O считаются положительными. Обычно считают положительными те повороты, которые совершаются «против часовой стрелки».

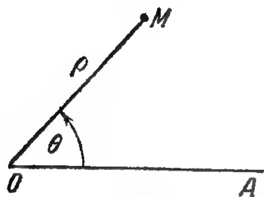


Рис. 9.

Пусть заданы полюс и полярная ось (рис. 9). Рассмотрим произвольную точку M и обозначим через ρ расстояние ее от точки O ($\rho = |OM|$), через θ — угол, на который нужно повернуть луч OA для совмещения его с лучом OM ($\theta = \angle AOM$). Угол θ мы будем понимать так, как это принято в тригонометрии (т. е. с учетом знака и с точностью до слагаемого вида $\pm 2n\pi$).

Полярными координатами точки M (относительно заданной системы) называются числа ρ и θ. При этом *число ρ называется первой координатой, или полярным радиусом, число θ — второй координатой, или полярным углом* (полярный угол называют также *амплитудой*).

Замечание 1. Среди возможных значений полярного угла точки M выделяют одно определенное, именно то, которое удовлетворяет неравенствам

$$-\pi < \theta \leqslant \pi;$$

его мы будем называть *главным*. Можно сказать, что в качестве главного значения полярного угла берется угол, на который нужно повернуть луч OA до совмещения с лучом OM, но делая при этом поворот не более, чем на 180° в ту или другую сторону. В частном случае, когда луч OM направлен строго противоположно лучу OA, возможными являются два поворота на 180°; тогда выбирается положительный поворот, т. е. в качестве главного значения полярного угла принимается $\theta = \pi$.

Замечание 2. Если точка M совпадает с O, то $\rho = |OM| = 0$. Значит, первая координата полюса равна нулю. Вторая его координата, очевидно, не имеет определенного значения.

15. В некоторых случаях приходится одновременно пользоваться и декартовой и полярной системами. В таких слу-

чаях возникает задача: зная полярные координаты некоторой точки, вычислить ее декартовы координаты и, обратно, зная ее декартовы координаты, вычислить полярные. Мы выведем сейчас формулы такого преобразования координат (формулы перехода от полярных координат к декартовым и обратно) в частном случае, когда *полюс полярной системы совпадает с началом декартовых прямоугольных координат, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс* (рис. 10). Кроме того, при определении полярного угла будем считать положительными повороты в том направлении, в каком следует вращать положительную полуось Ox, чтобы кратчайшим путем совместить с положительной полуосью Oy.

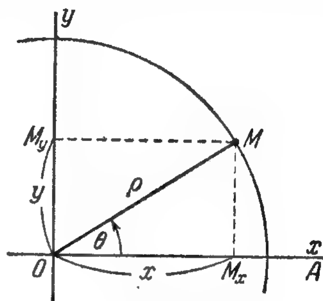


Рис. 10.

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x;\ y)$ — ее декартовы координаты, $(\rho;\ \theta)$ — полярные координаты. Опишем вокруг полюса O окружность радиуса ρ и будем рассматривать ее в качестве тригонометрической окружности, а ось Ox — в качестве начального диаметра. Опустим из точки M перпендикуляры на оси Ox, Oy; обозначим их основания соответственно через M_x, M_y (см. рис. 10). Отрезок $\overline{OM_x}$ является линией косинуса угла θ; следовательно, $OM_x = |OM| \cos\theta$. Отрезок $\overline{OM_y}$ является линией синуса угла θ; следовательно, $OM_y = |OM| \sin\theta$. Но $OM_x = x$, $OM_y = y$, $|OM| = \rho$; таким образом, из предыдущих соотношений имеем:

$$x = \rho\cos\theta, \qquad y = \rho\sin\theta. \tag{1}$$

Это и есть формулы, выражающие декартовы координаты через полярные. Выражения полярных координат через декартовы можно получить из этих же формул или непосредственно:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Заметим, однако, что формула $\operatorname{tg}\theta = \frac{y}{x}$ даже главное значение полярного угла определяет не вполне; именно, нужно еще знать, положительна величина θ или отрицательна.

Пример. Даны декартовы прямоугольные координаты точки: $(-2;\ 2)$; найти ее полярные координаты (считая, что полюс полярной системы совмещен с началом декартовой системы, а полярная ось совпадает с положительной полуосью абсцисс).

Решение. По формулам (2) имеем:

$$\rho = 2\sqrt{2}, \qquad \operatorname{tg}\theta = -1.$$

Согласно второму из этих равенств $\theta = \frac{3}{4}\pi$ или $\theta = -\frac{1}{4}\pi$. Так как данная точка лежит во второй четверти, то из двух указанных значений θ мы должны в качестве главного выбрать первое. Итак, $\rho = 2\sqrt{2}$, $\theta = \frac{3}{4}\pi$.

ГЛАВА 2

ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ НА ПЛОСКОСТИ

§ 5. Проекция отрезка. Расстояние между двумя точками

16. В дальнейшем при рассмотрении каких бы то ни было вопросов мы будем считать, что задана некоторая система координат. Если мы будем говорить, что даны какие-то точки, то это нужно понимать в том смысле, что известны их координаты. Если в какой-нибудь задаче требуется найти неизвестные точки, то задача будет считаться решенной, когда будут вычислены их координаты.

В этой главе рассматриваются решения ряда простейших задач аналитической геометрии.

17. Пусть дан произвольный отрезок $\overline{M_1M_2}$ и некоторая ось u (рис. 11).

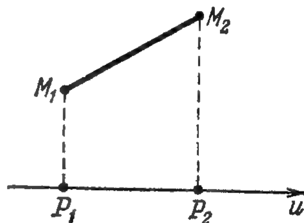


Рис. 11.

Опустим из точек M_1 и M_2 перпендикуляры на ось u и обозначим их основания, соответственно, через P_1 и P_2. Рассмотрим отрезок $\overline{P_1P_2}$ оси u, началом и концом которого являются, соответственно, проекция начала данного отрезка $\overline{M_1M_2}$ и проекция его конца. *Величина отрезка $\overline{P_1P_2}$ оси u называется проекцией данного отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось u,* что символически записывается равенством

$$\text{пр}_u \overline{M_1M_2} = P_1P_2.$$

Согласно этому определению *проекция отрезка на ось есть число*; оно может быть положительным (рис. 11), отрицательным (рис. 12, *а*) или равным нулю (рис. 12, *б*).

Особенно часто в аналитической геометрии встречается необходимость вычислять проекции отрезка на координатные оси. Условимся обозначать проекцию произвольного отрезка

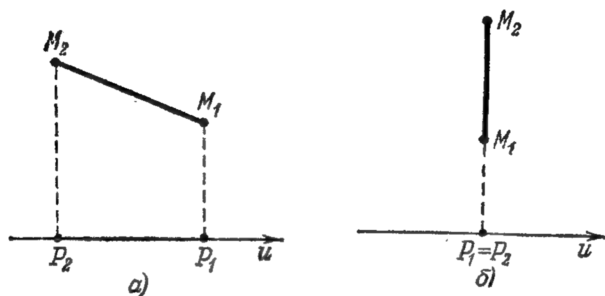


Рис. 12.

на ось Ox большой буквой X, проекцию на ось Oy — большой буквой Y.

Вопрос о вычислении X, Y по данным точкам M_1, M_2 решается следующей теоремой:

Теорема 3. *Каковы бы ни были точки* $M_1(x_1;\ y_1)$ *и* $M_2(x_2;\ y_2)$, *проекции отрезка* $\overline{M_1M_2}$ *на координатные оси выражаются формулами*:

$$X = x_2 - x_1,\quad Y = y_2 - y_1. \quad (1)$$

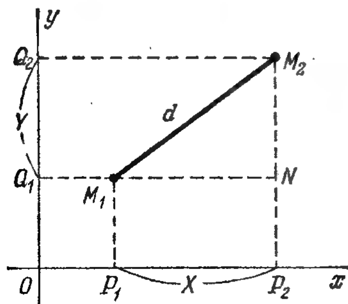


Рис. 13.

Доказательство. Опустим из точек M_1, M_2 перпендикуляры на ось Ox и обозначим их основания через P_1, P_2 (рис. 13). Согласно n° 9, эти точки имеют на оси Ox соответственно координаты x_1, x_2. Отсюда и в силу теоремы 1 n° 5

$$P_1P_2 = x_2 - x_1.$$

Но $P_1P_2 = X$, следовательно, $X = x_2 - x_1$. Аналогично устанавливается равенство $Y = Q_1Q_2 = y_2 - y_1$. Теорема доказана.

Таким образом, *чтобы получить проекции отрезка на координатные оси, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.*

Предположим, что начало отрезка M_1 совпадает с началом координат O; тогда $x_1=0$, $y_1=0$. Обозначив в этом случае конец отрезка просто буквой M, а координаты точки M буквами x, y, получаем по формулам (1)

$$X=x, \qquad Y=y; \tag{1'}$$

здесь X, Y — проекции отрезка $\overline{OM}$. Отрезок $\overline{OM}$, идущий из начала координат в данную точку M, называется *радиус-вектором этой точки*. Формулы (1′) выражают тот очевидный факт, что *декартовы прямоугольные координаты точки суть проекции ее радиус-вектора на оси координат.*

18. Одной из наиболее часто встречающихся простейших задач аналитической геометрии является задача определения расстояния между двумя данными точками. Для случая, когда точки определены декартовыми прямоугольными координатами, решение этой задачи дается следующей теоремой:

Теорема 4. *Как бы ни были расположены на плоскости точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$, расстояние d между ними определяется формулой*

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \tag{2}$$

Доказательство. Сохраняя обозначения, которые применялись в предыдущей теореме, пометим, кроме того, буквой N точку пересечения прямых M_1Q_1 и M_2P_2 (рис. 13). Так как треугольник M_1M_2N — прямоугольный, то по теореме Пифагора

$$d=\sqrt{M_1N^2+M_2N^2}.$$

Но, очевидно, длины катетов M_1N и M_2N совпадают с абсолютными величинами проекций X, Y отрезка $\overline{M_1M_2}$ на координатные оси; следовательно:

$$d=\sqrt{X^2+Y^2}.$$

Отсюда и на основании теоремы 3 находим:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2},$$

что и требовалось.

Пример. Найти расстояние между точками $M_1(-2;\ 3)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. По формуле (2)

$$e=\sqrt{[5-(-2)]^2+(4-3)^2}=\sqrt{50}=5\sqrt{2}.$$

19. Рассмотрим снова отрезок $\overline{M_1M_2}$. Проведем через его начальную точку M_1 луч u, параллельный оси Ox и направленный с нею в одну и ту же сторону (рис. 14). Обозначим через θ угол, на который следует повернуть луч u, чтобы он направился по отрезку $\overline{M_1M_2}$; этот угол будем понимать, как принято в тригонометрии (т. е. с учетом знака и с точностью до слагаемого вида $\pm 2n\pi$).

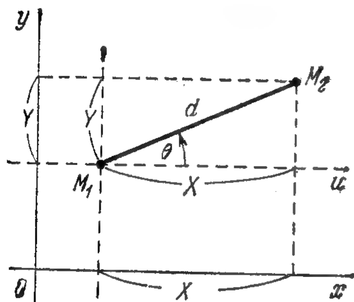


Рис. 14.

Угол θ будем называть *полярным углом отрезка* $\overline{M_1M_2}$ относительно данных координатных осей. Очевидно, θ представляет собой не что иное, как полярный угол точки M_2 в полярной системе координат, полюсом которой служит точка M_1, а полярной осью — луч u; в этой же системе длина d данного отрезка будет играть роль полярного радиуса точки M_2.

Примем теперь точку M_1 в качестве начала новой декартовой системы координат, оси которой направлены так же, как оси первоначально данной декартовой системы (на рис. 14 новые оси показаны пунктиром). Проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на соответственные оси старой и новой системы одинаковы: обозначим их, как и раньше, через X, Y. Числа X, Y являются декартовыми координатами точки M_2 в новой системе. Применяя к ним формулы (1) n° 15, найдем:

$$X=d\cos\theta,\quad Y=d\sin\theta. \tag{3}$$

Формулы (3) выражают проекции произвольного отрезка на координатные оси через его длину и полярный угол.

Из этих формул и на основании теоремы 3

$$x_2-x_1=d\cos\theta,\quad y_2-y_1=d\sin\theta, \tag{4}$$

или

$$\cos\theta = \frac{x_2 - x_1}{d}, \qquad \sin\theta = \frac{y_2 - y_1}{d}. \tag{5}$$

Формулы (5) *позволяют определить полярный угол отрезка по координатам его конца и начала* (предварительно следует найти d, пользуясь формулой (2)).

Во многих случаях удобной является также формула

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \tag{6}$$

которая очевидным образом выводится из формулы (4).

Пример 1. Найти проекции отрезка на координатные оси, зная его длину $d = 2\sqrt{2}$ и полярный угол $\theta = 135°$.

Решение. По формулам (3) находим:

$$X = 2\sqrt{2}\cos 135° = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2,$$

$$Y = 2\sqrt{2}\sin 135° = 2\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}} = 2.$$

Пример 2. Найти полярный угол отрезка, направленного из точки $M_1(5;\ \sqrt{3})$ в точку $M_2(6;\ 2\sqrt{3})$.

Решение. По формуле (2)

$$d = \sqrt{(6-5)^2 + (2\sqrt{3} - \sqrt{3})^2} = 2.$$

Применяя формулы (5), найдем:

$$\cos\theta = \frac{1}{2}, \qquad \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Следовательно, главное значение $\theta = 60°$.

20. Пусть u — *произвольная* ось, φ — угол наклона отрезка $\overline{M_1M_2}$ к этой оси, именно, угол, на который следует повернуть ось u, чтобы ее направление совпало с направлением отрезка $\overline{M_1M_2}$.

Для вычисления проекции отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось u служит формула

$$\text{пр}_u \overline{M_1M_2} = d\cos\varphi, \tag{7}$$

т. е. *проекция отрезка на любую ось равна его длине, умноженной на косинус угла наклона к этой оси.*

Доказывать формулу (7) нет необходимости, так как по сути дела она не отличается от первой из формул (3) n° 19. Заметим только, что знак угла не влияет на его косинус; поэтому *в формуле* (7) *угол* φ *можно понимать в смысле элементарной геометрии: без учета знака и в границах от* 0 *до* 180°.

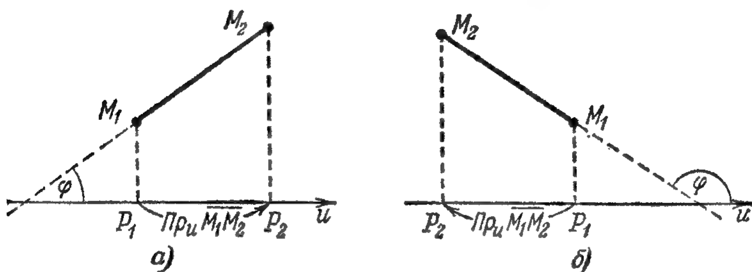


Рис. 15.

Если угол φ острый, то $\cos\varphi$ и проекция отрезка положительны (рис. 15, *а*), если φ — тупой угол, то $\cos\varphi$ и проекция отрезка отрицательны (рис. 15, *б*). Если φ — прямой угол, то проекция равна нулю.

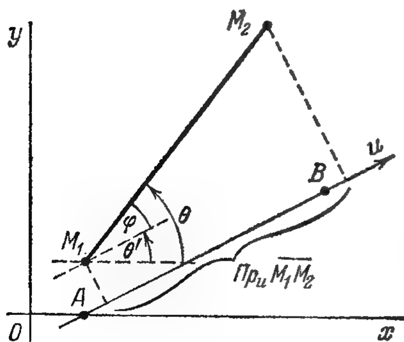


Рис. 16.

Пример. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2\ (4;\ 6)$. Найти проекцию отрезка $\overline{M_1M_2}$ на ось, проходящую через точки $A\,(1;\ 0)$ и $B\,(5;3)$ и направленную от A к B.

Решение. Обозначим через u данную ось, через φ — угол наклона отрезка $\overline{M_1M_2}$ к оси u, через θ и θ' — полярные углы отрезков $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{AB}$ (см. рис. 16, где все указанные углы построены при точке M_1). Легко видеть, что $\cos\varphi = \cos(\theta - \theta')$. Пусть X, Y — проекции на координатные оси отрезка $\overline{M_1M_2}$, X', Y' — проекции отрезка $\overline{AB}$, d и d' — длины отрезков $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{AB}$. По формуле (7)

$$\text{пр}_u\overline{M_1M_2} = d\cos\varphi = d\cos(\theta - \theta') = d\,(\cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta').$$

Отсюда, пользуясь формулами (3) n° 19, получим:

$$\text{пр}_u \overline{M_1M_2} = d\left(\frac{X}{d}\cdot\frac{X'}{d'}+\frac{Y}{d}\cdot\frac{Y'}{d'}\right)=\frac{XX'+YY'}{d'}.$$

Применяя теоремы 3 и 4, найдем:

$$X=3,\quad Y=5,\quad X'=4,\quad Y'=3,\quad d'=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

Следовательно,

$$\text{пр}_u \overline{M_1M_2}=\frac{3\cdot4+5\cdot3}{5}=\frac{27}{5}.$$

Задача решена.

§ 6. Вычисление площади треугольника

21. Пусть даны три точки $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ и $C(x_3; y_3)$, не лежащие на одной прямой. *Выведем формулу, выражающую площадь S треугольника ABC через координаты его вершин.*

Обозначим через φ угол между отрезками $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, через d и d' — длины этих отрезков. Как известно из элементарной геометрии, площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла между ними, следовательно,

$$S=\frac{1}{2}dd'\sin\varphi. \qquad (1)$$

Пусть θ — полярный угол отрезка $\overline{AB}$. Если кратчайший поворот отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{AC}$ на угол φ положителен, то, прибавляя к θ угол φ, мы получим полярный угол отрезка $\overline{AC}$; обозначив его через θ', найдем: $\theta'=\theta+\varphi$ (рис. 17, *а*). Если же кратчайший поворот $\overline{AB}$ к $\overline{AC}$ отрицателен, то мы получим полярный угол θ' отрезка $\overline{AC}$, отнимая от θ угол φ; в этом случае $\theta'=\theta-\varphi$ (рис. 17, *б*). Итак, $\varphi=\pm(\theta'-\theta)$; отсюда и из формулы (1)

$$S=\pm\frac{1}{2}dd'\sin(\theta'-\theta)=$$

$$=\pm\frac{1}{2}dd'(\sin\theta'\cos\theta-\cos\theta'\sin\theta). \qquad (2)$$

Обозначим проекции отрезка $\overline{AB}$ на координатные оси через X, Y, проекции отрезка $\overline{AC}$ — через X', Y'. По

формулам (3) n° 19

$$X = d\cos\theta, \qquad Y = d\sin\theta;$$
$$X' = d'\cos\theta', \quad Y' = d'\sin\theta'.$$

Раскрывая скобки в правой части равенства (2) и пользуясь последними соотношениями, найдем:

$$S = \pm\frac{1}{2}(XY' - X'Y). \tag{3}$$

Согласно теореме 3 n° 17

$$X = x_2 - x_1, \qquad Y = y_2 - y_1;$$
$$X' = x_3 - x_1, \qquad Y' = y_3 - y_1.$$

Подставляя эти выражения в формулу (3), получим:

$$S = \pm\frac{1}{2}[(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \tag{4}$$

Выражение, стоящее здесь в квадратных скобках, представляет собой определитель второго порядка*), поэтому

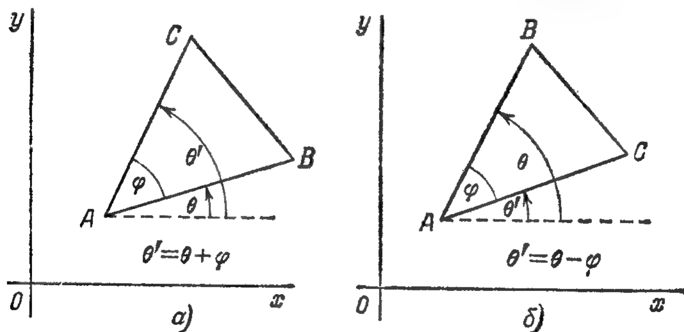


Рис. 17

формулу (4) можно написать также в виде

$$\pm S = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Установленный результат мы сформулируем в виде следующей теоремы:

*) Основные сведения об определителях даны в приложении (см. стр. 205).

Теорема 5. *Каковы бы ни были три точки* $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, *не лежащие на одной прямой, площадь* S *треугольника* ABC *определяется формулой* (5). *Правая часть этой формулы равна* $+S$ *в том случае, когда кратчайший поворот отрезка* AB *к отрезку* AC *положителен, и* $-S$ *в том случае, когда такой поворот отрицателен.*

Пример. Даны точки $A(1; 1)$, $B(6; 4)$, $C(8; 2)$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение. По формуле (5)

$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}=-8=-S.$$

Следовательно, $S=8$. То, что значение правой части формулы (5) в данном случае отрицательно, означает, что кратчайший поворот отрезка $\overline{AB}$ к отрезку $\overline{AC}$ является отрицательным.

§ 7. Деление отрезка в данном отношении

22. К числу простейших задач аналитической геометрии, имеющих многие применения, относится задача о делении отрезка в данном отношении. Прежде чем точно сформулировать, в чем эта задача заключается, нам придется подробно объяснить, что́ мы подразумеваем, когда говорим об *отношении, в котором некоторая точка делит данный отрезок.*

Пусть на плоскости даны две произвольные различные точки, из которых одна считается первой, другая — второй. Обозначим их в заданном порядке через M_1 и M_2. Проведем через данные точки прямую u и назначим на ней положительное направление; тем самым мы сделаем ее осью.

Пусть, далее, M — еще одна точка оси u, расположенная на ней как угодно с исключением только одного случая: она не должна совпадать с точкой M_2 (рис. 18).

Число λ, *определяемое равенством*

$$\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}, \tag{1}$$

где M_1M *и* MM_2 *суть величины направленных отрезков* $\overline{M_1M}$ *и* $\overline{MM_2}$ *оси* u, *называется отношением, в котором точка* M *делит направленный отрезок* $\overline{M_1M_2}$.

Замечание 1. Число λ не зависит от того, как выбрано положительное направление на прямой u, определяемой точками M_1 и M_2. В самом деле, если мы изменим положительное направление этой прямой на противоположное, то величины M_1M и MM_2 одновременно изменят знак (сохраняя модуль); при этом дробь $\frac{M_1M}{MM_2}$, очевидно, останется без изменения.

Замечание 2. Число λ не зависит и от выбора масштаба для измерения длин. В самом деле, при изменении масштаба величины всех отрезков на оси M_1M_2 умножатся на одно и то же число и, следовательно, отношение $\frac{M_1M}{MM_2}$ не изменится.

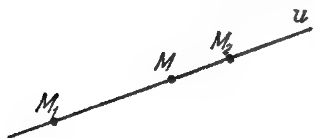


Рис. 18.

Замечание 3. Если не исключать возможности совпадения точки M с точкой M_2, то в том случае, когда M совпадет с M_2, равенство (1) не определяет никакого числа (так как $MM_2=0$). В этом случае говорят (по причине, которая выяснится в следующем п°), что отношение $\frac{M_1M}{MM_2}$ «равно бесконечности».

23. Предположим, что на прямой M_1M_2 положительное направление выбрано так, что отрезок $\overline{M_1M_2}$ положительно направлен; тогда M_1M_2 есть число положительное. Если при этом точка M находится *между точками* M_1 и M_2, то числа M_1M, MM_2 также положительны, а потому и отношение $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}$ есть число *положительное*. Если точка M приближается к точке M_1, то λ приближается к нулю (λ становится равным нулю, когда M совпадает с M_1); если точка M приближается к точке M_2, то λ неограниченно возрастает или, как говорят, стремится к бесконечности (поэтому и говорят, что λ «обращается в бесконечность», когда M совпадает с M_2).

Допустим теперь, что точка M находится на прямой, определяемой точками M_1 и M_2, *вне отрезка* $\overline{M_1M_2}$. В этом случае одно из чисел M_1M, MM_2 положительно, другое отрицательно, а так как M_1M и MM_2 суть величины

разных знаков, то $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ в данном случае есть число отрицательное.

24. В аналитической геометрии задача о делении отрезка в данном отношении заключается в следующем.

Считая известными координаты двух точек $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$ и отношение λ, в котором некоторая (неизвестная) точка M делит отрезок $\overline{M_1M_2}$, найти координаты точки M.

Решение этой задачи дает следующая теорема:

Теорема 6. *Если точка $M(x; y)$ делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении λ, то координаты этой точки выражаются формулами*

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (2)$$

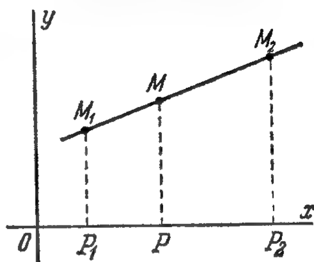


Рис. 19.

Доказательство. Спроектируем точки M_1, M_2, M на ось Ox и обозначим их проекции соответственно через P_1, P_2 и P (рис. 19). На основании известной теоремы элементарной геометрии о пропорциональности отрезков прямых, заключенных между параллельными прямыми, имеем:

$$\frac{P_1P}{PP_2} = \frac{M_1M}{MM_2} = \lambda. \quad (3)$$

Согласно теореме 3 (n° 17)

$$P_1P = x - x_1, \quad PP_2 = x_2 - x.$$

Отсюда и из равенства (3) получаем:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \lambda.$$

Решая это уравнение относительно неизвестного x, найдем, что

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}.$$

Тем самым мы получили первую из формул (2). Вторая устанавливается совершенно аналогично при помощи проектирования на ось Oy. Теорема доказана.

Замечание. Если $\lambda=-1$, то формулы (2) теряют смысл, так как в знаменателях этих формул оказывается нуль $(1+\lambda=0)$. Но в этом случае и поставленная задача не имеет решения; в самом деле, никакая точка не может делить отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=-1$, так как, если $\frac{M_1M}{MM_2}=-1$, то $M_1M=-MM_2$ и $M_1M+MM_2=M_1M_2=0$, что невозможно, поскольку точки M_1, M_2 предполагаются различными.

25. Отметим один важный частный случай предыдущей теоремы: *если $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$ — две произвольные точки и $M(x;\ y)$ — середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, то*

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\quad y=\frac{y_1+y_2}{2}.$$

Эти формулы получаются из формул (2) n° 24 при $\lambda=1$*). Мы можем утверждать, следовательно, что *каждая координата середины отрезка равна полусумме соответствующих координат его концов.*

Пример 1. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. На определяемой ими прямой найти точку M, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2, и находится между точками M_1 и M_2.

Решение. Искомая точка делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=\frac{1}{2}$. Применяя формулы (2) n° 24, находим координаты этой точки: $x=3$, $y=2$.

Пример 2. Даны точки $M_1(1;\ 1)$ и $M_2(7;\ 4)$. На прямой M_1M_2 найти точку M, которая в два раза ближе к M_1, чем к M_2, и находится вне отрезка, ограниченного точками M_1 и M_2.

Решение. Искомая точка делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $\lambda=-\frac{1}{2}$. Применяя формулы (2) n° 24, находим координаты этой точки: $x=-5$, $y=-2$.

Пример 3. Даны вершины треугольника $A(5;-1)$, $B(-1;\ 7)$, $C(1;\ 2)$. Найти длину его внутренней биссектрисы, проведенной из вершины A.

Решение. Обозначим через M точку пересечения указанной биссектрисы со стороной BC, через c и b — длины сторон AB и AC. Как известно из элементарной геометрии, биссектриса, проведенная

---

*) Если M — середина отрезка $\overline{M_1M_2}$, то $M_1M=MM_2$ и потому $\lambda=\frac{M_1M}{MM_2}=1$.

из какой-нибудь вершины треугольника, делит противолежащую этой вершине сторону на части, пропорциональные прилежащим сторонам. Таким образом, точка M делит отрезок $\overline{BC}$ в отношении λ, где

$$\lambda=\frac{BM}{MC}=\frac{c}{b}.$$

Пользуясь формулой (2) n° 18, находим длины сторон AB и AC

$$c=\sqrt{(5+1)^2+(-1-7)^2}=10,\quad b=\sqrt{(5-1)^2+(-1-2)^2}=5.$$

Следовательно, $\lambda=2$. Применяя формулы (2) n° 24, находим координаты точки M: $x=\frac{1}{3}$, $y=\frac{11}{3}$.

Снова пользуясь формулой (2) n° 18, получаем искомую длину биссектрисы $AM=\frac{14}{3}\sqrt{2}$.

Пример 4. В точках $M_1(x_1;\ y_1)$, $M_2(x_2;\ y_2)$, $M_3(x_3;\ y_3)$ помещены массы m_1, m_2, m_3. Найти центр тяжести этой системы масс.

Решение. Найдем сначала центр тяжести $M'(x';\ y')$ системы двух масс m_1 и m_2. Согласно известному положению механики центр тяжести системы этих масс делит отрезок $\overline{M_1M_2}$ на части, обратно пропорциональные массам m_1, m_2, т. е. в отношении $\lambda=\frac{m_2}{m_1}$. По формулам (2) n° 24 находим:

$$x'=\frac{x_1+\frac{m_2}{m_1}x_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2},\quad y'=\frac{y_1+\frac{m_2}{m_1}y_2}{1+\frac{m_2}{m_1}}=\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}.$$

Пусть $M(x;\ y)$—центр тяжести системы трех масс m_1, m_2, m_3. Положение точки M не изменится, если массы m_1, m_2 будут сосредоточены в точке M'. Иначе говоря, точка M является центром тяжести системы двух масс: массы m_3, помещенной в точке M_3, и массы m_1+m_2, помещенной в точке M'. Следовательно, мы можем найти искомую точку M как точку, которая делит отрезок $\overline{M'M_3}$ в отношении $\lambda=\frac{m_3}{m_1+m_2}$. Применяя формулы (2) n° 24, получаем:

$$x=\frac{x'+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{\frac{x_1m_1+x_2m_2}{m_1+m_2}+\frac{m_3}{m_1+m_2}x_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{x_1m_1+x_2m_2+x_3m_3}{m_1+m_2+m_3},$$

$$y=\frac{y'+\frac{m_3}{m_1+m_2}y_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{\frac{y_1m_1+y_2m_2}{m_1+m_2}+\frac{m_3}{m_1+m_2}y_3}{1+\frac{m_3}{m_1+m_2}}=\frac{y_1m_1+y_2m_2+y_3m_3}{m_1+m_2+m_3}.$$

Замечание. Если дана система масс $m_1, m_2, \ldots, m_k$, помещенных в точках $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, ..., $M_k(x_k; y_k)$, то координаты центра тяжести этой системы масс определяются формулами

$$x=\frac{x_1m_1+x_2m_2+\ldots+x_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}, \qquad y=\frac{y_1m_1+y_2m_2+\ldots+y_km_k}{m_1+m_2+\ldots+m_k}.$$

Для их доказательства следует применить формулы (2) n° 24 и метод математической индукции.

§ 8. Преобразование декартовых координат при параллельном сдвиге осей

26. Как мы уже знаем, в задачах аналитической геометрии положение заданных геометрических объектов определяется относительно некоторой системы координат. Может, однако, возникнуть надобность в замене координатной системы, к которой отнесены данные рассматриваемой задачи, другой системой, по каким-либо соображениям более удобной. Но произвольная точка в разных координатных системах имеет, вообще говоря, разные координаты. Поэтому в том случае, когда при рассмотрении одного вопроса употребляются две системы координат, возникает потребность: зная координаты произвольной точки в одной системе, вычислить координаты этой же точки в другой системе. Для этой цели служат формулы преобразования координат, соответствующие данному изменению координатной системы.

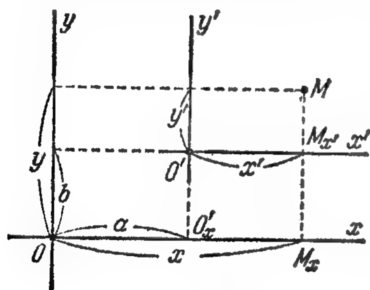


Рис. 20.

27. Прежде всего мы установим формулы преобразования декартовых координат при параллельном сдвиге осей, т. е. при таком изменении декартовой системы координат, когда меняется положение начала координат, а направления осей (и масштаб) остаются неизменными.

Пусть Ox и Oy — старые, а $O'x'$ и $O'y'$ — новые координатные оси (рис. 20). *Положение новых осей относительно старой системы определяется заданием старых координат но-*

вого начала: $O'(a; b)$. Число a будем называть величиной сдвига по направлению оси Ox, число b — величиной сдвига по направлению оси Oy. Произвольная точка M плоскости имеет относительно старых осей некоторые координаты $(x; y)$; эта же точка по отношению к новым осям имеет другие координаты: $(x'; y')$. Наша цель — установить формулы, выражающие x, y через x', y' (или x', y' через x, y).

Спроектируем точку O' на ось Ox и точку M на оси Ox и $O'x'$.

Обозначим проекцию точки O' на ось Ox через O'_x, проекции точки M на оси Ox и $O'x'$ — через M_x и $M_{x'}$. Очевидно, величина отрезка O'_xM_x оси Ox равна величине отрезка $O'M_{x'}$ оси $O'x'$. Но $O'M_{x'} = x'$; следовательно, $O'_xM_x = x'$. Кроме того, $OO'_x = a$, $OM_{x'} = x$. Согласно основному тождеству (см. n° 3) $OM_x = OO'_x + O'_xM_x$; отсюда и на основании предыдущих указаний имеем $x = x' + a$. Аналогично при помощи проектирований на оси Oy и $O'y'$ найдем $y = y' + b$.

Итак,

$$x = x' + a, \quad y = y' + b. \tag{1}$$

Это и есть искомые формулы. Их можно также записать в виде

$$x' = x - a, \quad y' = y - b. \tag{1'}$$

Полученный результат можно сформулировать так: *при параллельном сдвиге декартовой системы координат на величину a в направлении оси Ox и на величину b в направлении оси Oy абсциссы всех точек уменьшаются на величину a, ординаты — на величину b.*

§ 9. Преобразование декартовых прямоугольных координат при повороте осей

28. Теперь мы установим формулы преобразования декартовых прямоугольных координат при повороте осей, т. е. при таком изменении декартовой прямоугольной системы координат, когда обе оси поворачиваются в одну сторону на один и тот же угол, а начало координат и масштаб остаются неизменными.

Пусть Ox и Oy—старые, а Ox', Oy'—новые координатные оси (рис. 21). *Положение новых осей относительно старой системы определяется заданием угла поворота, совмещающего старые оси с новыми.* Этот угол мы обозначим буквой α и будем понимать его, как принято в тригонометрии (положительные повороты определим, как в n°15).

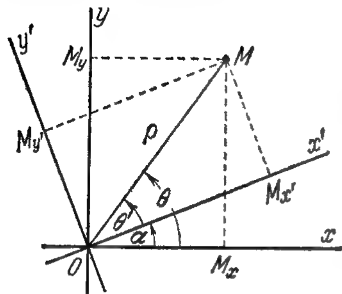


Рис. 21.

Произвольная точка M плоскости имеет относительно старых осей некоторые координаты $(x; y)$, эта же точка по отношению к новым осям имеет, вообще говоря, другие координаты $(x'; y')$. Именно, $x = OM_x$, $y = OM_y$, $x' = OM_{x'}$, $y' = OM_{y'}$ (см. рис. 21). Наша цель—установить формулы, выражающие x', y' через x, y или x, y через x', y'.

Обозначим через (ρ, θ) полярные координаты точки M, считая полярной осью Ox, и через (ρ, θ')—полярные координаты той же точки M, считая полярной осью Ox' (в каждом случае $\rho = |OM|$). Очевидно, $\theta = \theta' + \alpha$. Далее, согласно формулам (1) n° 15

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

и аналогично

$$x' = \rho\cos\theta', \quad y' = \rho\sin\theta'.$$

Таким образом,

$$x = \rho\cos\theta = \rho\cos(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta'\cos\alpha - \sin\theta'\sin\alpha) =$$
$$= \rho\cos\theta'\cos\alpha - \rho\sin\theta'\sin\alpha = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha,$$
$$y = \rho\sin\theta = \rho\sin(\theta' + \alpha) = \rho(\cos\theta'\sin\alpha + \sin\theta'\cos\alpha) =$$
$$= \rho\cos\theta'\sin\alpha + \rho\sin\theta'\cos\alpha = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha.$$

Итак,

$$\left.\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Это и есть искомые формулы, т. е. формулы, которые при повороте осей на угол α выражают старые координаты $(x; y)$ произвольной точки M через новые координаты $(x'; y')$ этой же точки.

Формулы, выражающие новые координаты x', y' точки M через ее старые координаты x, y, можно получить из равенств (1), рассматривая их как систему двух уравнений с двумя неизвестными x', y' и решая эту систему относительно x', y'. Но эти формулы можно получить и сразу при помощи следующего рассуждения: если новая система получается поворотом старой на угол α, то старая система получается поворотом новой на угол $-\alpha$; поэтому в равенствах (1) можно поменять местами старые и новые координаты, заменяя одновременно α на $-\alpha$. Выполнив это преобразование, мы получим:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

что и требовалось.

§ 10. Преобразование декартовых прямоугольных координат при изменении начала и повороте осей

29. Мы рассмотрим сейчас такое перемещение осей, которое можно осуществить путем параллельного сдвига и последующего поворота (масштаб предполагается неизменным).

Обозначим величину сдвига системы в направлении оси Ox через a, величину сдвига в направлении оси Oy через b, угол поворота системы — через α. Пусть $O'x'$ и $O'y'$ — новые оси. Произвольная точка M плоскости имеет относительно старых осей некоторые координаты (x, y); эта же точка M относительно новых осей имеет, вообще говоря, другие координаты (x', y'). Наша цель — получить формулы, выражающие x', y' через x, y, а также формулы, выражающие x, y через x', y'.

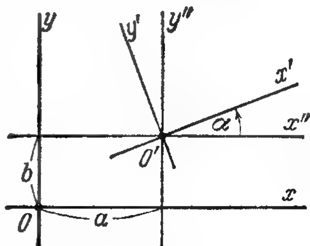


Рис. 22.

Для решения этой задачи введем вспомогательную систему координат, направления осей которой совпадают с направлениями осей старой системы, а начало совпадает с началом новой системы (рис. 22); оси вспомогательной

системы мы обозначим через $O'x''$ и $O'y''$, а координаты точки M относительно этих осей — через x'', y''. Так как вспомогательная система получается параллельным сдвигом старой на величину a в направлении Ox и на величину b в направлении Oy, то согласно n° 27

$$x = x'' + a,$$
$$y = y'' + b.$$

Так как, далее, новая система получается поворотом вспомогательной на угол α, то согласно n° 28

$$x'' = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha,$$
$$y'' = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Подставляя эти выражения x'', y'' в правые части предыдущих равенств, получим:

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Рассматривая здесь x', y' как неизвестные и определяя их из этой системы, найдем:

$$\left.\begin{aligned} x' &= (x-a)\cos\alpha + (y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha + (y-b)\cos\alpha. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Последние две пары формул и являются искомыми.

Формулы (1) выражают старые координаты произвольной точки через ее новые координаты, формулы (2), наоборот, выражают новые координаты через старые.

Полученный результат мы сформулируем в виде следующей теоремы:

Теорема 7. *Если оси декартовой прямоугольной системы параллельно переносятся на величину a в направлении Ox и на величину b в направлении Oy и, кроме того, поворачиваются на угол α (а масштаб остается неизменным), то этому изменению системы соответствуют формулы преобразования координат*

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha - y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha + y' \cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

выражающие старые координаты x, y произвольной точки плоскости через ее новые координаты x', y', и алгебраически равносильные им формулы

$$\left.\begin{aligned} x' &= \quad (x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha, \\ y' &= -(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

выражающие новые координаты через старые.

Пример. Составить формулы преобразования координат, соответствующие переносу начала в точку O' (2; 3) и повороту осей на угол $+45°$.

Решение. Полагая в формулах (1) $a=2$, $b=3$, $\alpha=\frac{\pi}{4}$, получим выражения старых координат через новые:

$$x=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}+2, \qquad y=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}+3.$$

Отсюда (или из формул (2)) получаются выражения новых координат через старые:

$$x'=\frac{x+y}{\sqrt{2}}-\frac{5}{\sqrt{2}}, \quad y'=\frac{-x+y}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Замечание. Обычно на чертежах координатные оси располагаются так, что для совмещения положительной полуоси абсцисс с положительной полуосью ординат ее нужно поворачивать (кратчайшим путем) против часовой стрелки. В таком случае система координат называется *правой*. Иногда, однако, употребляется система осей, иным образом расположенных, именно так, что кратчайший поворот положительной полуоси абсцисс к положительной полуоси ординат направлен по часовой стрелке. В таком случае система координат называется *левой*.

Пусть даны две (декартовы прямоугольные) системы координат. Если обе они правые, или обе левые, то оси одной из них можно совместить с осями другой при помощи параллельного сдвига и последующего поворота на некоторый угол; отсюда и из предыдущего следует, что при переходе от одной из этих систем к другой координаты любой точки плоскости преобразуются по формулам вида (1). Если же одна из данных систем правая, другая — левая, то оси одной из них нельзя совместить с осями другой при помощи сдвига и последующего поворота; именно, если при помощи сдвига и поворота мы совместим положительную полуось абсцисс одной системы («старой») с положительной полуосью абсцисс другой («новой»), то их положительные полуоси ординат направятся противоположно друг другу. Следовательно, в этом случае при пере-

ходе от одной системы к другой преобразование координат будет определяться формулами, которые получаются из формул (1) изменением знака величины y'. Таким образом, общие формулы преобразования декартовых прямоугольных координат (при неизменном масштабе) могут быть написаны в виде

$$\left.\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha \mp y' \sin\alpha + a, \\ y &= x' \sin\alpha \pm y' \cos\alpha + b, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где a, b — старые координаты нового начала, α — угол, на который нужно повернуть старую ось абсцисс, чтобы она направилась так же, как новая; верхние знаки в формулах (3) соответствуют случаю перехода от правой системы к правой или от левой — к левой, нижние знаки соответствуют случаю разноименных систем. Нужно еще иметь в виду, что если старая система является левой, то угол α следует считать положительным в том случае, когда он отсчитывается по часовой стрелке.

ГЛАВА 3
УРАВНЕНИЕ ЛИНИИ

§ 11. Понятие уравнения линии. Примеры задания линий при помощи уравнений

30. В элементарной геометрии детально исследуются лишь немногие линии: прямая, окружность, ломаные. Между тем потребности техники ставят перед математикой общую задачу исследования многочисленных линий, многообразных по своей форме и по характеру своих свойств. Для решения этой общей задачи требуются методы более совершенные, чем те, какими располагает элементарная геометрия. Такие методы дают алгебра и математический анализ. В основе же применения методов алгебры и анализа лежит некоторый единообразный способ задания линии, именно — способ задания ее при помощи уравнения.

31. Пусть x и y — две произвольные переменные величины. Это значит, что как под символом x, так и под символом y подразумеваются какие угодно (вещественные) числа. Соотношение вида $F(x, y)=0$, где $F(x, y)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее x и y, мы будем называть уравнением с двумя переменными x, y, если $F(x, y)=0$ есть равенство, верное не всегда, т. е. не для всяких пар чисел x, y. Таковы, например, соотношения $2x+7y-1=0$, $x^2+y^2-25=0$, $\sin x+\sin y-1=0$ и т. п.

Если соотношение $F(x, y)=0$ имеет место при любых численных значениях x, y, то его называют *тождеством*. Таковы, например, соотношения $(x+y)^2-x^2-2xy-y^2=0$, $(x+y)(x-y)-x^2+y^2=0$ и т. п.

В дальнейшем, рассматривая уравнения с двумя переменными, мы не исключаем возможности, что левая часть уравнения, помимо x и y, содержит еще и другие символы a, b, c, ...; но в таком случае мы будем предполагать, что они представляют собой фиксированные (хотя бы и не указанные) числа, и будем называть их постоянными *параметрами* уравнения. Например, в уравнении $ax+by-1=0$ параметрами являются a и b.

32. Говорят, что два числа $x=x_0$, $y=y_0$ удовлетворяют некоторому уравнению с двумя переменными, если при подстановке их в это уравнение вместо переменных получается верное равенство. Например, числа $x=3$, $y=4$ удовлетворяют уравнению $x^2+y^2-25=0$, так как при подстановке этих чисел в уравнение его левая часть обращается в нуль; напротив, числа $x=1$, $y=2$ этому уравнению не удовлетворяют, так как после подстановки их в уравнение слева получаем число, не равное нулю.

33. Рассмотрим произвольное уравнение $F(x, y)=0$. Предположим, что x и y теперь обозначают уже не любые числа, а числа, удовлетворяющие этому уравнению. И при таком условии величины x и y могут, вообще говоря, изменяться, но уже не произвольно друг относительно друга: задание численного значения величины x обусловливает возможные численные значения величины y. Ввиду этого говорят, что уравнение $F(x, y)=0$ устанавливает между переменными x и y функциональную зависимость.

34. Важнейшим понятием аналитической геометрии является понятие уравнения линии. Что́ под этим подразумевается, мы сейчас объясним.

Пусть на плоскости дана какая-нибудь линия и пусть вместе с тем выбрана некоторая система координат.

Уравнением данной линии (в выбранной системе координат) *называется такое уравнение $F(x, y)=0$ с двумя переменными, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки, лежащей на этой линии, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.*

Таким образом, если известно уравнение линии, то относительно каждой точки плоскости возможно решить вопрос: лежит она на этой линии или нет. Для этого достаточно координаты испытуемой точки подставить в урав-

нение вместо переменных; если эти координаты удовлетворяют уравнению, точка лежит на линии, если не удовлетворяют,—не лежит.

Высказанное определение дает основу методам аналитической геометрии; суть их заключается в том, что рассматриваемые линии исследуются при помощи анализа их уравнений.

35. Во многих задачах уравнение линии играет роль первичного данного, а сама линия рассматривается как нечто вторичное. Иначе говоря, часто заранее дается какое-нибудь уравнение и тем самым определяется некоторая линия. Это связано с потребностью геометрического изображения функциональных зависимостей.

Если уравнение дано и мы отвечаем на вопрос «что́ такое определенная им линия» (или что́ такое линия, имеющая его «своим уравнением»), — то удобно пользоваться следующей формулировкой: *линия, определенная данным уравнением* (в некоторой системе координат), *есть геометрическое место всех точек плоскости, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.*

36. Линия, определяемая уравнением вида $y=f(x)$, называется *графиком* функции $f(x)$. Можно также сказать, что линия, определяемая произвольным уравнением $F(x, y)=0$, есть график той функциональной зависимости между x и y, которая устанавливается этим уравнением.

37. Поскольку величины x, y рассматриваются как координаты переменной точки, их называют *текущими координатами.* Если в основу положена не декартова, а какая-нибудь другая система координат, то текущие координаты следует обозначать другими буквами, так, как принято для этой системы.

38. Рассмотрим несколько простейших примеров определения линий уравнениями.

1. Данное уравнение есть $x-y=0$. Представив его в виде $y=x$, заключаем: точки, координаты которых этому уравнению удовлетворяют, суть те и только те, которые расположены в первой или третьей четвертях на одинаковых расстояниях от координатных осей. Таким образом, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой биссектрису первого и третьего координатных углов (рис. 23). Это и есть линия,

определенная уравнением $x-y=0$ (она же — график функции $y=x$).

2. Данное уравнение есть $x+y=0$. Представив его в виде $y=-x$, заключаем: точки, координаты которых этому уравнению удовлетворяют, суть те и только те, которые расположены на одинаковых расстояниях от координатных осей во второй или четвертой четвертях. Таким образом

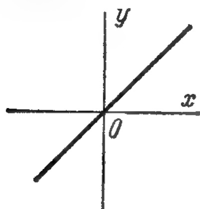


Рис. 23.

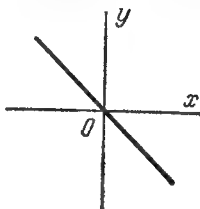


Рис. 24.

геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, представляет собой биссектрису второго и четвертого координатных углов (рис. 24). Это и есть линия, определенная уравнением $x+y=0$ (она же — график функции $y=-x$).

3. Данное уравнение есть $x^2-y^2=0$. Представив его в виде $(x-y)(x+y)=0$, заключаем: точки, координаты которых удовлетворяют данному уравнению, суть те и только те, которые удовлетворяют **либо** уравнению $x-y=0$, **либо** уравнению $x+y=0$. Таким образом, линия, определяемая уравнением $x^2-y^2=0$, состоит из точек **двух** биссектрис координатных углов (рис. 25).

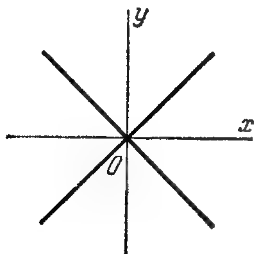


Рис. 25.

4. Данное уравнение есть $x^2+y^2=0$. Так как при вещественных x и y числа x^2 и y^2 не могут иметь разных знаков, то при сложении они не могут взаимно уничтожиться; следовательно, если $x^2+y^2=0$, то $x=0$ и $y=0$. Таким образом, данному уравнению удовлетворяют координаты только точки $O(0; 0)$. Значит, геометрическое место точек,

координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=0$, состоит лишь из одной точки. В данном случае уравнение определяет, как говорят, *вырожденную* линию.

5. Данное уравнение есть $x^2+y^2+1=0$. Так как при любых вещественных x и y числа x^2 и y^2 не отрицательны, то $x^2+y^2+1>0$. Значит, нет ни одной точки, координаты которой удовлетворяют данному уравнению; никакого геометрического образа на плоскости это уравнение не определяет.

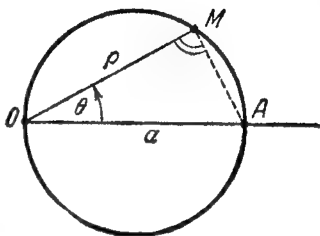


Рис. 26.

6. Данное уравнение есть $\rho=a\cos\theta$, где a — положительное число, переменные ρ и θ — полярные координаты. Обозначим через M точку с полярными координатами $(\rho;\ \theta)$, через A — точку с полярными координатами $(a;\ 0)$. Если $\rho=a\cos\theta$, то угол OMA — прямой, и обратно. Следовательно, геометрическое место точек, полярные координаты которых удовлетворяют уравнению $\rho=a\cos\theta$, представляет собой окружность с диаметром OA (рис. 26).

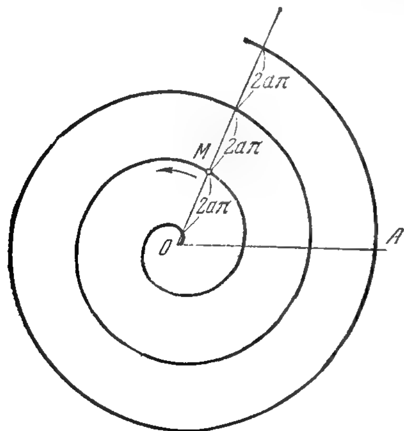


Рис. 27.

7. Пусть дано уравнение $\rho=a\theta$, где a — некоторое положительное число. Чтобы представить себе определяемую данным уравнением линию, будем предполагать, что θ возрастает, начиная от нуля, и проследим за соответствующим движением переменной точки $M(\rho;\ \theta)$, координаты которой связаны этим уравнением. Если $\theta=0$, то также $\rho=0$; если θ возрастает, начиная от нуля, то ρ будет возрастать пропорционально θ (число a служит коэффициентом пропор-

циональности). Мы видим, что переменная точка $M(\rho;\ \theta)$, исходя из полюса заданной полярной системы координат, движется вокруг полюса (в положительном направлении), одновременно удаляясь от него. Таким образом, точка M описывает некоторую спираль; спираль, определяемая уравнением $\rho = a\theta$, называется *спиралью Архимеда* (рис. 27).

Если точка $M(\rho;\ \theta)$, исходя из произвольного положения, движется по спирали Архимеда и совершает в положительном направлении один полный оборот вокруг полюса, то

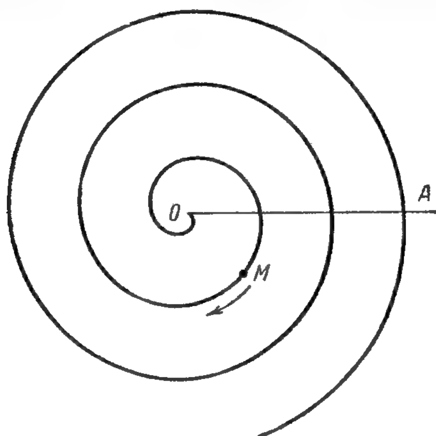


Рис. 28.

угол θ возрастает на 2π, а полярный радиус ρ на $2a\pi$. Отсюда следует, что спираль Архимеда рассекает каждый полярный луч на равные отрезки (не считая отрезка, примыкающего к полюсу); все эти отрезки имеют постоянную длину $2a\pi$.

Уравнение $\rho = a\theta$, где a — отрицательное число, определяет «обратную» спираль Архимеда, точки которой соответствуют отрицательным значениям θ (рис. 28).

8. Данное уравнение есть $\rho = \frac{a}{\theta}$, где a — некоторое положительное число; будем исследовать определяемую им линию. Возьмем какое-нибудь положительное значение θ, например $\theta = \frac{\pi}{2}$, ему соответствует точка $M_1\left(\frac{2a}{\pi};\ \frac{\pi}{2}\right)$.

Если θ затем неограниченно увеличивается, то ρ, будучи обратно пропорциональным θ, стремится к нулю; следовательно, переменная точка $M(\rho;\ \theta)$ движется вокруг полюса в положительном направлении и вместе с тем неограниченно приближается к полюсу (рис. 29). Пусть теперь θ уменьшается, начиная от значения $\frac{\pi}{2}$, и стремится к нулю; при этом $\rho \longrightarrow \infty$ и точка $M(\rho;\ \theta)$ уходит в бесконечность. Чтобы

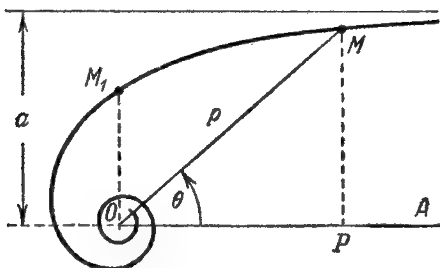


Рис. 29.

исследовать движение точки M более детально, спроектируем точку M на полярную ось и обозначим проекцию через P; тогда, очевидно, $PM = \rho \sin\theta$ (см. вторую из формул (1) n° 15). В силу данного уравнения $\rho \sin\theta = a\frac{\sin\theta}{\theta}$. Но, как известно из анализа, $\frac{\sin\theta}{\theta} \longrightarrow 1$ при $\theta \longrightarrow 0$. Следовательно, при $\theta \longrightarrow 0$ величина PM стремится к a. Отсюда можно заключить, что точка M, уходя в бесконечность, приближается к прямой, которая параллельна полярной оси и отстоит от нее на расстоянии a.

Мы видим, что данное уравнение, как и в предыдущем примере, определяет спираль; такая спираль называется *гиперболической*.

Уравнение $\rho = \frac{a}{\theta}$, где a — отрицательное число, определяет «обратную» гиперболическую спираль, точки которой соответствуют отрицательным значениям θ (рис. 30).

9. Данное уравнение есть $\rho = a^{\theta}$, где a — положительное число, большее единицы. Это уравнение определяет спираль, называемую *логарифмической*.

Чтобы уяснить себе особенности логарифмической спирали, предположим, что $\theta \to +\infty$; в таком случае $\rho = a^{\theta} \to +\infty$ и, следовательно, переменная точка $M(\rho; \theta)$, двигаясь вокруг полюса в положительном направлении, неограниченно удаляется от полюса. Если точка M, исходя

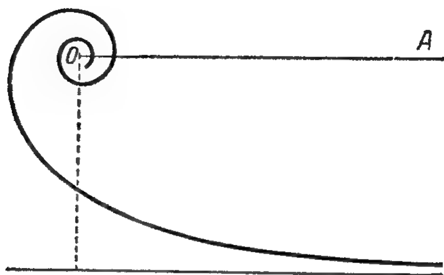


Рис. 30.

из произвольного положения, совершает один полный оборот в положительном направлении вокруг полюса, то к ее полярному углу прибавляется 2π, а полярный радиус умножается на $a^{2\pi}$ (так как $a^{\theta+2\pi} = a^{\theta}a^{2\pi}$). Таким образом, с каждым оборотом вокруг полюса полярный радиус точки M возрастает, причем рост идет в геометрической прогрессии (со знаменателем $a^{2\pi}$).

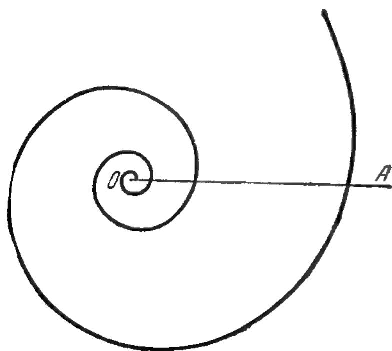


Рис 31.

Предположим теперь, что $\theta \to -\infty$; тогда $\rho \to 0$ и точка M, вращаясь вокруг полюса (в отрицательном направлении), неограниченно приближается к нему (рис. 31).

Если a меньше единицы (будучи положительным), то уравнение $\rho = a^{\theta}$ определяет «обратную» логарифмическую спираль (рис. 32). В этом случае при вращении точки M вокруг полюса в положительном направлении она неогра-

ниченно приближается к полюсу, а при вращении в отрицательном направлении — неограниченно удаляется от него (так как в случае $0 < a < 1$ имеем $a^{\theta} \to 0$ при $\theta \to +\infty$ и $a^{\theta} \to +\infty$ при $\theta \to -\infty$).

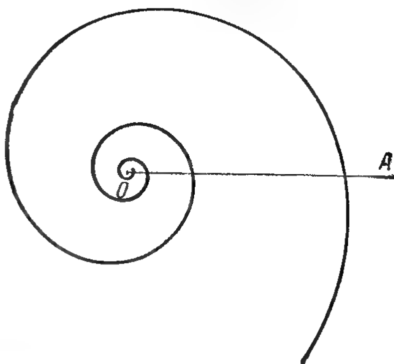


Рис. 32.

Если $a = 1$, то уравнение $\rho = a^{\theta}$ определяет окружность, так как для любого θ будет $\rho = 1$.

Мы привели сейчас примеры уравнений настолько простых, что определяемые ими линии усматривались непосредственно. В более сложных случаях даже приближенное изображение линии (с заданной точностью) может быть весьма затруднительным и потребовать применения разнообразных методов анализа и аналитической геометрии.

§ 12. Примеры вывода уравнений заранее данных линий

39. В предыдущем параграфе мы рассмотрели несколько примеров определения линии при помощи заранее данного уравнения. Здесь мы рассмотрим примеры противоположного характера; в каждом из них линия определяется чисто геометрически, а уравнение ее требуется найти (как говорят, «вывести» из геометрического определения линии).

Если линия определена как геометрическое место точек, подчиненных известному условию, то, выражая это условие при помощи координат, мы получим некоторую зависимость между координатами. Это и будет уравнение данной линии, так как ему удовлетворяют координаты точки в том и только в том случае, когда расположение точки подчинено поставленному условию, т. е. когда точка лежит на данной линии.

40. Пример. Дана декартова прямоугольная система координат. Вывести уравнение окружности, которая имеет центр $C\ (\alpha; \beta)$ и радиус, равный r (рис. 33).

Обозначим буквой M переменную точку, буквами x, y — ее координаты (т. е. текущие координаты). Данная окружность есть геометрическое место точек, каждая из которых отстоит от точки C на расстоянии r; таким образом, точка M находится на данной окружности в том и только в том случае, когда

$$CM = r. \tag{1}$$

По формуле (2) n° 18 имеем $CM = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2}$. Заменяя этим выражением величину CM *) в равенстве (1), получаем:

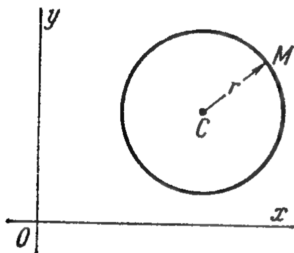


Рис. 33.

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = r. \tag{2}$$

Мы нашли уравнение, которое связывает величины x, y и которому удовлетворяют координаты тех и только тех точек, что лежат на данной окружности. Это и есть, следовательно, искомое уравнение. Задача решена.

41. Возводя обе части равенства (2) в квадрат, мы получим стандартную запись *уравнения окружности с центром* $C(\alpha; \beta)$ *и радиусом* r:

$$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = r^2. \tag{3}$$

Оно встречается во многих геометрических задачах **). Полагая в нем $\alpha = 0$, $\beta = 0$, найдем *уравнение окружности с центром в начале координат*:

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{4}$$

42. *Пример.* Вывести уравнение траектории точки M, которая в каждый момент движения находится вдвое ближе к точке $A(2; 0)$, чем к точке $B(8; 0)$.

Обозначим через x, y координаты точки M (т. е. текущие координаты). Согласно условию задачи, точка M всегда вдвое ближе к A, чем к B, т. е.

$$2AM = BM. \tag{5}$$

---

*) См. сноску на стр. 12.

**) При возведении обеих частей уравнения в квадрат может получиться уравнение, не равносильное исходному, а именно, удовлетворяющееся и такими значениями x и y, которые не удовлетворяют исходному уравнению. В данном случае, однако, так не будет, т. е. уравнение (3) равносильно уравнению (2). В самом деле, извлекая из обеих частей уравнения (3) квадратный корень, мы получим $+\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \pm r$. Но в правой части необходимо взять знак $+$, так как в противном случае получится неверное равенство. Таким образом, уравнение (2) выводится из уравнения (3), как и уравнение (3) выводится из уравнения (2).

По формуле (2) n° 18

$$AM = \sqrt{(x-2)^2 + y^2}, \qquad BM = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}.$$

Отсюда и из равенства (5) находим:

$$2\sqrt{(x-2)^2 + y^2} = \sqrt{(x-8)^2 + y^2}. \tag{6}$$

Мы получили уравнение, связывающее величины x и y. Ему удовлетворяют координаты любой точки рассматриваемой траектории и не удовлетворяют координаты никакой другой точки плоскости. Следовательно, это уравнение и является искомым. Задача решена. Мы можем только пожелать переделать запись этого уравнения и привести его к более удобному виду. С этой целью возведем обе части уравнения (6) в квадрат. Мы получим уравнение:

$$4[(x-2)^2 + y^2] = (x-8)^2 + y^2,$$

равносильное уравнению (6) *). Раскрывая скобки, находим:

$$4x^2 - 16x + 16 + 4y^2 = x^2 - 16x + 64 + y^2$$

или

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Получив уравнение траектории в таком виде, мы легко можем уяснить себе форму этой траектории. Действительно, сравнивая полученное уравнение с уравнением (4) n° 41, заключаем: рассматриваемая траектория есть окружность, имеющая центр в начале координат и радиус $r = 4$.

43. Пример. Составить уравнение прямой в полярных координатах, считая известными расстояние p от полюса до прямой и угол θ_0 от полярной оси до луча, направленного из полюса перпендикулярно к прямой (рис. 34).

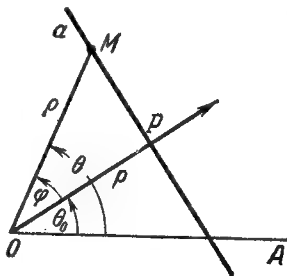


Рис. 34.

Решение. Пусть a — произвольная прямая, P — основание перпендикуляра, опущенного на нее из полюса O; согласно условию будем считать известными $OP = p$ и угол θ_0 от полярной оси OA до луча OP. Возьмем на плоскости произвольную точку $M(\rho;\ \theta)$. Очевидно, точка M лежит на прямой a в том и только в том случае, когда проекция точки M на луч OP совпадает с точкой P, т. е. когда $\rho\cos\varphi = p$, где $\varphi = \angle POM$. Заметив, что $\varphi = \theta - \theta_0$ (или $\varphi = \theta_0 - \theta$), получаем отсюда искомое уравнение прямой a в виде $\rho\cos(\theta - \theta_0) = p$; текущие координаты здесь суть ρ и θ.

*) Это доказывается так же, как аналогичное утверждение в n° 41 (см. предыдущее подстрочное примечание).

§ 13. Задача о пересечении двух линий

44. В аналитической геометрии часто приходится решать следующую задачу:

Даны уравнения двух линий:

$$F(x, y)=0, \quad \Phi(x, y)=0.$$

Найти точки их пересечения.

Как всегда в аналитической геометрии, говоря: «найти точки», мы подразумеваем: «вычислить их координаты». Принцип решения этой задачи усматривается сразу из определения уравнения линии, данного в n° 34.

В самом деле, каждая точка пересечения данных линий есть их общая точка. Следовательно, координаты такой точки должны удовлетворять как уравнению $F(x, y)=0$, так и уравнению $\Phi(x, y)=0$. Мы найдем все точки пересечения данных линий, если решим их уравнения совместно. При этом каждое решение системы

$$\left.\begin{aligned} F(x, y)&=0, \\ \Phi(x, y)&=0 \end{aligned}\right\}$$

определяет одну из искомых точек. Само собой разумеется, что практическое осуществление этого общего принципа может натолкнуться на вычислительные трудности.

Пример 1. Даны уравнения двух окружностей $(x-1)^2+(y-3)^2=4$ и $(x-3)^2+(y-5)^2=4$. Найти точки их пересечения.

Решение. Раскрывая скобки и перенося все члены в левую сторону, можем записать данные уравнения в виде:

$$x^2+y^2-2x-6y+6=0, \qquad x^2+y^2-6x-10y+30=0. \tag{1}$$

Вычтем из первого уравнения второе; получим: $4x+4y-24=0$ или $y=-x+6$. Объединяя это уравнение с первым из данных, составим систему:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2-2x-6y+6&=0, \\ y&=-x+6. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Система (2) равносильна системе (1) *). Поэтому задача сводится к решению этой системы. Подставим в первое из уравнений (2) $y=-x+6$; найдем: $x^2+x^2-12x+36-2x+6x-36+6=0$, или

*) Так как система (2) выведена из системы (1), а систему (1), в свою очередь, легко вывести из системы (2).

$x^2-4x+3=0$. Отсюда $x_{1,2}=2\pm\sqrt{4-3}$, т. е. $x_1=1$, $x_2=3$. По найденным значениям x определим соответствующие значения y из уравнения $y=-x+6$; при $x_1=1$ получаем $y_1=5$, при $x_2=3$ имеем $y_2=3$. Таким образом, искомыми являются точки (1; 5) и (3; 3).

Пример 2. Даны уравнения двух линий: $x+y=0$ (биссектриса второго координатного угла) и $(x-5)^2+y^2=1$ (окружность). Найти точки их пересечения.

Решение. Составим систему

$$\left.\begin{aligned}(x-5)^2+y^2=1,\\ x+y=0.\end{aligned}\right\}$$

Подставим в первое уравнение $y=-x$ (из второго). Получаем: $(x-5)^2+x^2=1$, или $x^2-5x+12=0$. Отсюда

$$x_{1,2}=\frac{5}{2}\pm\sqrt{\frac{25}{4}-12}=\frac{5}{2}\pm\frac{\sqrt{-23}}{2}.$$

Так как $\sqrt{-23}$ есть мнимое число, заключаем: система не имеет вещественных решений, следовательно, данные линии не пересекаются.

§ 14. Параметрические уравнения линии

45. Пусть задана какая-нибудь система координат и пусть даны две функции от одного аргумента t:

$$\left.\begin{aligned}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t).\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Условимся величины x и y при каждом значении t рассматривать как координаты некоторой точки M. При изменении t величины x и y, вообще говоря, меняются, следовательно, точка M перемещается по плоскости. *Равенства* (1) *называются параметрическими уравнениями траектории точки* M; *аргумент* t *называется переменным параметром.*

Параметрические уравнения играют важную роль в механике, где они используются в качестве так называемых *уравнений движения*. Именно, если материальная точка M движется по плоскости, то в каждый момент времени t она имеет определенные координаты x, y. Уравнения, которые выражают x и y как функции времени t, и называются уравнениями движения точки M; они имеют вид (1).

В механике движение материальной точки считается математически заданным, если составлены его уравнения.

46. Пусть некоторая линия определена параметрическими уравнениями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ как траектория точки $M(x;\ y)$.

Если $F(x, y)=0$ есть следствие данных уравнений, то ему удовлетворяют координаты $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ точки M при любом t. Таким образом, точка M движется по линии $F(x, y)=0$. Если при этом точка M обходит всю эту линию, то $F(x, y)=0$ представляет собой обычное уравнение траектории точки M. Составление такого следствия $F(x, y)=0$ параметрических уравнений $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ называется *исключением параметра*.

Пример. Уравнения $x=r\cos t$, $y=r\sin t$ суть параметрические уравнения окружности, которая имеет центр в начале координат и радиус r. В самом деле, возводя эти уравнения в квадрат и складывая почленно, мы получим их следствие $x^2+y^2=r^2$. Отсюда видно, что точка $M(x; y)$ движется по указанной окружности. Кроме того, так как параметр t принимает все возможные численные значения, то луч OM (который составляет с осью Ox угол t) занимает все возможные положения. Следовательно, точка M обегает всю окружность (при бесконечном возрастании t бесконечно много раз).

47. Пусть $\rho=f(\theta)$ — полярное уравнение некоторой линии. Та же линия в декартовых координатах может быть определена параметрическими уравнениями

$$x=f(\theta)\cos\theta,$$
$$y=f(\theta)\sin\theta.$$

Чтобы получить эти уравнения, достаточно в формулах $x=\rho\cos\theta$, $y=\rho\sin\theta$ (см. n° 15) заменить ρ функцией $f(\theta)$.

Пример. Спираль Архимеда, гиперболическая спираль и логарифмическая спираль имеют полярные уравнения соответственно $\rho=a\theta$, $\rho=\frac{a}{\theta}$, $\rho=a^\theta$ (см. n° 38). Отсюда находим в декартовых координатах параметрические уравнения:

$$x=a\theta\cos\theta, \qquad y=a\theta\sin\theta$$

— спирали Архимеда,

$$x=\frac{a\cos\theta}{\theta}, \qquad y=\frac{a\sin\theta}{\theta}$$

— гиперболической спирали и

$$x=a^\theta\cos\theta, \qquad y=a^\theta\sin\theta$$

— логарифмической спирали.

Во всех рассмотренных случаях параметром является полярный угол θ переменной точки.

§ 15. Алгебраические линии

48. Основным предметом изучения в аналитической геометрии являются линии, определяемые по отношению к декартовым прямоугольным координатам алгебраическими уравнениями. Это суть уравнения следующих видов:

$$Ax + By + C = 0; \quad (1)$$

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad (2)$$

$$Ax^3 + Bx^2y + Cxy^2 + Dy^3 + Ex^2 + Fxy + Gy^2 + Hx + Iy + K = 0; \quad (3)$$

. . . .

Здесь A, B, C, D, E и т. д.— некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений.

Уравнение (1) называется *общим уравнением первой степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, чтобы уравнение действительно содержало члены первой степени, т. е. одновременное обращение в нуль A и B исключается); уравнение (2) называется *общим уравнением второй степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, чтобы уравнение действительно содержало члены второй степени, т. е. случай, когда все три коэффициента A, B, C равны нулю, исключается); уравнение (3) называется *общим уравнением третьей степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, исключая случай, когда все четыре коэффициента A, B, C, D равны нулю). Аналогичный вид имеют уравнения четвертой, пятой и т. д. степеней.

В качестве примеров неалгебраических уравнений укажем следующие:

$$y - \sin x = 0, \qquad 10^x - 5^y + 1 = 0,$$
$$y - \log x = 0, \qquad 2^{xy} - x - y = 0.$$
$$y - 10^x = 0,$$

Линия, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется алгебраическим уравнением степени n, называется алгебраической линией n-го порядка.

49. Теорема 8. *Линия, которая определяется алгебраическим уравнением степени n в какой-нибудь системе декартовых прямоугольных координат, в любой другой системе таких же координат определяется также алгебраическим уравнением и той же степени n.*

Доказательство. Пусть некоторая линия определена алгебраическим уравнением степени n в системе координат с осями Ox и Oy. При переходе к какой-нибудь другой системе координат с осями $O'x'$, $O'y'$ координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам вида

$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha \mp y'\sin\alpha+a,\\ y&=x'\sin\alpha \pm y'\cos\alpha+b \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

при некотором выборе знаков перед вторыми членами в правых частях (см. замечание в конце n° 29). Чтобы получить уравнение той же линии в новых координатах, мы должны старые аргументы ее уравнения заменить по формулам (4). Левая часть этого уравнения представляет собой сумму одночленов, каждый из которых есть взятое с некоторым коэффициентом произведение целых неотрицательных степеней переменных x и y. После замены x и y по формулам (4) и после раскрытия всех скобок мы получим в левой части преобразуемого уравнения сумму новых одночленов, каждый из которых есть взятое с некоторым коэффициентом произведение целых неотрицательных степеней новых переменных x' и y'. Следовательно, алгебраический характер уравнения при таком преобразовании сохраняется.

Теперь мы должны доказать, что и степень уравнения остается неизменной. Это почти очевидно. В самом деле, так как формулы (4) имеют относительно x' и y' первую степень, то после замены x и y по этим формулам и раскрытия всех скобок в левой части преобразуемого уравнения не может возникнуть ни одного одночлена, степень которого *) относительно новых переменных x' и y' была бы выше n.

Таким образом, при любом указанном преобразовании алгебраического уравнения степень его не может повыситься. Заранее, однако, неясно, не может ли она понизиться (т. е. не могут ли все старшие одночлены после преобразования взаимно уничтожиться). Но если при переходе от одной декартовой системы прямоугольных координат к другой такой же системе координат степень некоторого алгебраического уравнения понижается, то при обратном переходе она должна повыситься, а это, как мы видели, невозможно. Теорема доказана.

Установленная сейчас теорема показывает, что алгебраический характер уравнения и порядок суть свойства, присущие самой алгебраической линии, т. е. что они не связаны с выбором координатных осей.

Общая теория алгебраических линий служит предметом специальных сочинений по аналитической геометрии. В этой книге будут систематически рассматриваться только линии первого и второго порядков.

В ближайших параграфах устанавливается, что линии первого порядка суть прямые (и только прямые).

*) Степенью одночлена называется сумма показателей входящих в него переменных.

ГЛАВА 4

ЛИНИИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

§ 16. Угловой коэффициент

50. Пусть задана декартова прямоугольная система координат и некоторая прямая. Обозначим через α угол, на который нужно повернуть ось Ox, чтобы придать ей одно из направлений данной прямой; углу припишем знак плюс или минус в зависимости от того, будет ли этот поворот положительным или отрицательным. *Назовем угол α углом наклона данной прямой к оси Ox.*

Если после некоторого поворота оси Ox мы придадим ей одно из направлений данной прямой, то, совершая дополнительный поворот на угол $\pm\pi$, или $\pm 2\pi$, или $\pm 3\pi$ и т. д., мы каждый раз снова будем получать одно из направлений данной прямой. Таким образом, угол α может иметь множество различных значений, которые отличаются друг от друга на величину $\pm n\pi$, где n — натуральное число. *Чаще всего в качестве угла наклона прямой к оси Ox берут наименьшее положительное значение угла α* (рис. 35, *а*, 35, *б*), *а в случае, когда прямая параллельна оси Ox, угол наклона ее к оси Ox считают равным нулю.*

Существенно заметить, что для данной прямой все значения угла наклона ее к оси Ox имеют один и тот же тангенс (так как $\operatorname{tg}(\alpha \pm n\pi) = \operatorname{tg}\alpha$).

51. *Тангенс угла наклона прямой к оси Ox называется угловым коэффициентом этой прямой.*

Обозначая угловой коэффициент буквой k, запишем предыдущее определение символически:

$$k = \operatorname{tg}\alpha. \tag{1}$$

В частности, если $\alpha = 0$, то и $k = 0$, т. е. прямая, параллельная оси Ox, имеет угловой коэффициент, равный нулю. Если $\alpha = \frac{\pi}{2}$, то $k = \operatorname{tg} \alpha$ теряет арифметический смысл (не выражается никаким числом), т. е. прямая, перпендикулярная к оси Ox, не имеет углового коэффициента. Впрочем, очень

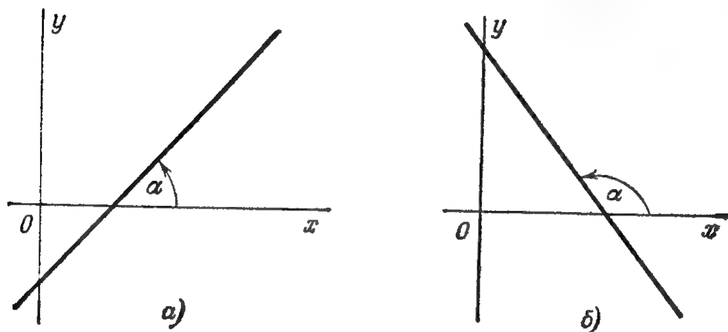


Рис. 35.

часто говорят, что если прямая перпендикулярна к оси Ox, ее угловой коэффициент «обращается в бесконечность»; этим выражают тот факт, что $k \to \infty$ при $\alpha \to \frac{\pi}{2}$.

Угловой коэффициент является важнейшей характеристикой направления прямой и постоянно используется в аналитической геометрии и ее приложениях.

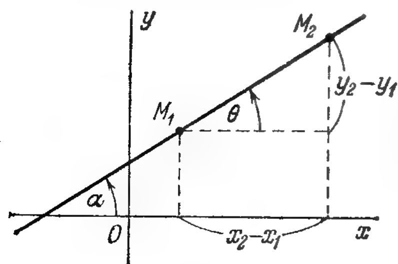


Рис. 36.

52. Рассмотрим произвольную прямую; предположим только, что она не перпендикулярна к оси Ox. Возьмем на ней любые две точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$. Полярный угол θ отрезка $\overline{M_1M_2}$ равен углу наклона рассматриваемой прямой к оси Ox, следовательно, тангенс угла θ равен угловому коэффициенту этой прямой (рис. 36); отсюда и по формуле (6) n° 19

находим:

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{2}$$

(это соотношение легко усматривается также из рис. 36). *Формула* (2) *выражает угловой коэффициент прямой по двум ее данным точкам.*

§ 17. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

53. Пусть дана некоторая прямая; как и раньше, предположим, что она не перпендикулярна к оси Ox. *Выведем уравнение данной прямой, полагая известными ее угловой коэффициент k и величину b направленного отрезка $\overline{OB}$,* который она отсекает на оси Oy (см. рис. 37).

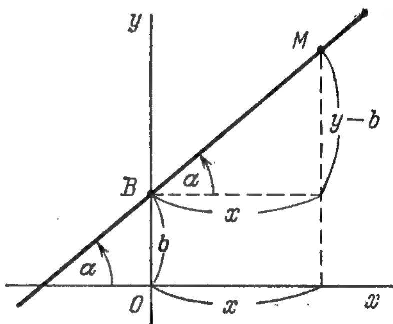


Рис. 37.

Обозначим через M переменную точку, через x, y — ее координаты (т. е. текущие координаты); рассмотрим, кроме того, точку $B(0, b)$, в которой прямая пересекает ось Oy. Вычислим правую часть формулы (2) n° 52, приняв в качестве M_1 точку B, в качестве M_2 — точку M. Если точка M лежит на данной прямой, то в результате вычисления мы получим угловой коэффициент этой прямой, т. е.

$$\frac{y - b}{x} = k, \tag{3}$$

если же M не лежит на данной прямой, то это равенство не будет соблюдаться. Следовательно, равенство (3) является у р а в н е н и е м д а н н о й п р я м о й (оно легко усматривается также из рис. 37, если принять во внимание, что $k = \operatorname{tg} \alpha$). Освобождаясь от знаменателя и перенося b в правую сторону, получим

$$y = kx + b. \tag{4}$$

54. Итак, *каждая прямая, не перпендикулярная к оси Ox, может быть определена уравнением вида* (4).

Обратно, *каждое уравнение вида* (4) *определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент* k *и отсекает на оси* Oy *отрезок величины* b. В самом деле, если дано уравнение $y=kx+b$, то, каковы бы ни были числа k и b, всегда возможно построить прямую, которая имеет данный угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок $\overline{OB}$ данной величины b; но тогда, согласно предыдущему, построенная прямая и будет определяться заданным уравнением. *Уравнение вида* (4) *называют уравнением прямой с угловым коэффициентом.*

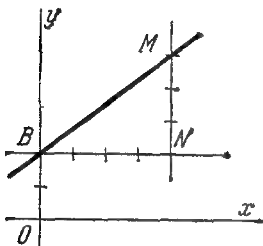


Рис. 38.

Пример. Построить прямую по уравнению

$$y=\frac{3}{4}x+2.$$

Решение. Отложим на оси Oy отрезок $OB=2$ (рис. 38); проведем через точку B в «правую» сторону параллельно оси Ox отрезок $BN=4$, и через точку N в направлении оси Oy («вверх») — отрезок $NM=3$. После этого, соединяя точки B и M, получим искомую прямую (она отсекает на оси Oy отрезок $b=2$ и составляет с осью Ox угол, тангенс которого равен $^3/_4$).

55. Функция

$$y=kx+b$$

называется *линейной*. На основании изложенного можно сказать, что *графиком линейной функции является прямая линия.*

При $b=0$ мы получаем:

$$y=kx. \qquad (5)$$

Переменные x и y, связанные такой зависимостью, называются *пропорциональными* друг другу; число k называют *коэффициентом пропорциональности.* Из предыдущего ясно, что *графиком функции* $y=kx$ *является прямая, которая проходит через начало координат и имеет угловой коэффициент* k.

56. Во многих случаях встречается необходимость с о с т а в и т ь у р а в н е н и е п р я м о й, з н а я о д н у е е т о ч к у $M_1(x_1;\ y_1)$ и у г л о в о й к о э ф ф и ц и е н т k. Искомое уравнение сразу получается из формулы (2) n° 52. В самом деле, пусть M — переменная точка, x, y — ее (текущие) координаты. Если M лежит на прямой, которая проходит через точку M_1

и имеет данный угловой коэффициент k, то в силу формулы (2) n° 52

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=k; \tag{6}$$

если же точка M не лежит на этой прямой, то равенство (6) не соблюдается. Таким образом, равенство (6) и есть искомое уравнение; обычно его пишут в виде

$$y-y_1=k(x-x_1). \tag{7}$$

Замечание. В том частном случае, когда в качестве $M_1(x_1;\ y_1)$ берется точка $B(0;\ b)$, уравнение (7) принимает вид (4).

57. Применяя соотношение (7), легко решить следующую задачу: составить уравнение прямой, которая проходит через две данные точки $M_1(x_1;\ y_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2)$.

Пользуясь формулой (2) n° 52, находим угловой коэффициент прямой

$$k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},$$

после чего, на основании (7), получаем искомое уравнение

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

Это уравнение принято писать в виде

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}. \tag{8}$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(3;\ 1)$ и $M_2(5;\ 4)$.

Решение. Подставляя данные координаты в соотношение (8), получим

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{3},$$

или $3x-2y-7=0$.

§ 18. Вычисление угла между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых

58. Одной из стандартных задач аналитической геометрии является вычисление угла между двумя прямыми. Здесь мы выведем формулу, по которой можно вычислить угол между прямыми, зная их угловые коэффициенты (мы

предполагаем, что ни одна из прямых не перпендикулярна к оси Ox).

Рассмотрим две прямые; будем одну из них (какую угодно) называть первой, другую второй (рис. 39). Обозначим, соответственно, через k_1 и k_2 угловые коэффициенты этих прямых, через φ — *угол наклона второй прямой к первой, т. е. угол, на который нужно повернуть первую прямую,*

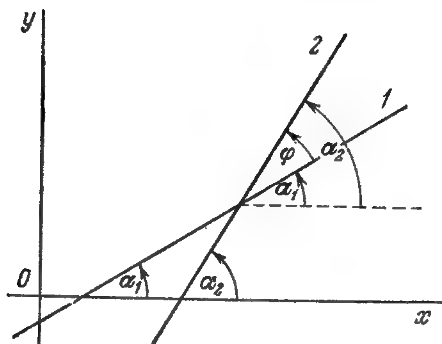


Рис. 39.

чтобы придать ей одно из направлений второй прямой. Углу φ припишем знак плюс или минус в зависимости от того, будет ли этот поворот положительным, или отрицательным. Говоря об угле между двумя прямыми, мы и будем подразумевать угол φ.

Пусть α_1 — угол наклона первой прямой к оси Ox. Если мы повернем ось Ox на угол α_1, то придадим ей одно из направлений первой прямой; если затем повернуть ось Ox еще на угол φ, то она получит одно из направлений второй прямой. Таким образом, прибавляя к углу α_1 угол φ, мы получаем угол наклона к оси Ox второй прямой; обозначим его через α_2. Согласно сказанному, имеем

$$\alpha_1 + \varphi = \alpha_2, \text{ или } \varphi = \alpha_2 - \alpha_1.$$

Отсюда

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_2 - \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 - \operatorname{tg} \alpha_1}{1 + \operatorname{tg} \alpha_1 \operatorname{tg} \alpha_2}.$$

Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \qquad (1)$$

Это и есть формула, которую мы имели в виду получить.

В случае $\varphi = \frac{\pi}{2}$ тангенс угла φ теряет арифметический смысл («обращается в бесконечность»); в этом случае (и только в этом случае) знаменатель правой части формулы (1) будет равен нулю.

Пример. Даны прямые $y = -\frac{1}{7}x + 2$, $y = \frac{3}{4}x + 3$. Найти угол между ними.

Решение. По формуле (1) находим:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{21+4}{28-3} = 1.$$

Таким образом, один из углов, которые составляют данные прямые, равен 45°.

59. При решении различных задач аналитической геометрии часто бывает важно, зная уравнения двух прямых, установить, являются ли они параллельными или являются ли они перпендикулярными друг к другу.

Этот вопрос выясняется также весьма просто.

Пусть известны угловые коэффициенты двух прямых k_1 и k_2. Обозначим через α_1 и α_2 соответственно углы наклона этих прямых к оси Ox. Очевидно, данные прямые параллельны тогда и только тогда, когда углы наклона их к оси Ox имеют одинаковые значения, т. е. когда $\operatorname{tg}\alpha_1 = \operatorname{tg}\alpha_2$. Но $\operatorname{tg}\alpha_1 = k_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = k_2$. Отсюда заключаем, что *признаком параллельности двух прямых является равенство их угловых коэффициентов:*

$$k_2 = k_1.$$

Данные прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда угол φ между ними равен $\frac{\pi}{2}$, т. е. когда $\operatorname{tg}\varphi$ теряет арифметический смысл; в этом случае знаменатель правой части формулы (1) обращается в нуль и мы имеем: $1 + k_1 k_2 = 0$. Следовательно, *признаком перпендикулярности двух прямых*

является соотношение

$$k_1k_2 = -1.$$

Последнее соотношение обычно пишут в виде

$$k_2 = -\frac{1}{k_1} \tag{2}$$

и, соответственно этому, условие перпендикулярности двух прямых формулируют так: *угловые коэффициенты перпендикулярных прямых обратны по абсолютной величине и противоположны по знаку.*

Применяя установленные признаки, сразу можно сказать, что, например, прямые $y = \frac{2}{3}x + 1$, $y = \frac{2}{3}x + 5$ параллельны, а прямые $y = \frac{3}{4}x + 2$, $y = -\frac{4}{3}x + 3$ перпендикулярны друг другу.

Пример. Найти проекцию точки $P(4; 9)$ на прямую, проходящую через точки $A(3; 1)$ и $B(5; 2)$.

Решение. Искомую точку найдем, решая совместно уравнение прямой AB с уравнением перпендикуляра, проведенного к этой прямой из точки P. Прежде всего, составим уравнение прямой AB; применяя соотношение (8) n° 57, получаем:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1},$$

или

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}.$$

Чтобы составить уравнение перпендикуляра из точки P на прямую AB, напишем уравнение произвольной прямой, проходящей через точку P; согласно соотношению (7) n° 56 имеем:

$$y - 9 = k(x - 4), \tag{*}$$

где k — пока еще не определенный угловой коэффициент. Нам нужно, чтобы искомая прямая прошла перпендикулярно к AB; следовательно, ее угловой коэффициент должен удовлетворять условию перпендикулярности с прямой AB. Так как угловой коэффициент прямой AB равен $\frac{1}{2}$, то согласно формуле (2) находим $k = -2$. Подставляя найденное значение k в уравнение (*), получаем:

$$y - 9 = -2(x - 4) \text{ или } y = -2x + 17.$$

Решая совместно уравнения

$$y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2},$$

$$y=-2x+17,$$

найдем координаты искомой проекции:

$$x=7, \quad y=3.$$

§ 19. Прямая как линия первого порядка. Общее уравнение прямой

60. Здесь мы докажем следующую принципиальную теорему:

Теорема 9. *В декартовых координатах каждая прямая определяется уравнением первой степени и обратно, каждое уравнение первой степени определяет некоторую прямую.*

Доказательство. Сначала докажем первое утверждение теоремы. Пусть дана произвольная прямая. Если эта прямая не перпендикулярна к оси Ox, то согласно n°53 она определяется уравнением вида $y=kx+b$, т. е. уравнением первой степени.

Если прямая перпендикулярна к оси Ox, то все ее точки имеют одинаковые абсциссы, равные величине отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox (рис. 40); таким образом, если мы обозначим величину этого отрезка буквой a, то получим уравнение прямой в виде $x=a$, что также есть уравнение первой степени. Итак, каждая прямая в декартовых координатах определяется уравнением первой степени; тем самым первое утверждение теоремы доказано.

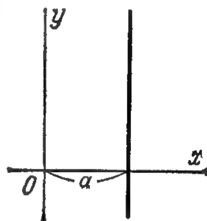


Рис. 40.

Докажем обратное утверждение. Пусть дано уравнение первой степени

$$Ax+By+C=0 \qquad (1)$$

с какими угодно численными значениями A, B, C. Если $B \neq 0$, то данное уравнение можно записать в виде:

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}.$$

Обозначая $-\frac{A}{B}$ через k, $-\frac{C}{B}$ через b, получим $y=kx+b$, а такое уравнение согласно п° 53 определяет прямую, которая имеет угловой коэффициент k и отсекает на оси Oy отрезок, величина которого равна b.

Если $B=0$, то $A\neq 0$, и уравнению (1) можно придать вид

$$x=-\frac{C}{A}.$$

Обозначая $-\frac{C}{A}$ через a, получим $x=a$, т. е. уравнение прямой, перпендикулярной к оси Ox. Итак, каждое уравнение первой степени определяет прямую. Теорема доказана.

Линии, которые в декартовых координатах определяются уравнением первой степени, называются, как мы знаем, линиями первого порядка (см. п° 48). Употребляя эту терминологию, мы можем высказать установленный результат так: *каждая прямая есть линия первого порядка; каждая линия первого порядка есть прямая.*

61. Уравнение вида $Ax+By+C=0$ называется *общим уравнением прямой* (как общее уравнение первой степени). При различных численных значениях A, B, C оно может определять всевозможные прямые без исключения.

§ 20. Неполное уравнение первой степени. Уравнение прямой «в отрезках»

62. Рассмотрим три частных случая, когда уравнение первой степени является неполным.

1) $C=0$; *уравнение имеет вид* $Ax+By=0$ *и определяет прямую, проходящую через начало координат.*

Действительно, числа $x=0$, $y=0$ удовлетворяют уравнению $Ax+By=0$. Следовательно, начало координат принадлежит прямой.

2) $B=0\ (A\neq 0)$; *уравнение имеет вид* $Ax+C=0$ *и определяет прямую, параллельную оси* Oy.

Этот случай уже рассматривался в п° 60 в ходе доказательства теоремы 9. Как было тогда показано, уравнение $Ax+C=0$ приводится к виду

$$x=a,$$

где $a=-\frac{C}{A}$. Такое уравнение определяет прямую, перпен-

дикулярную оси Ox, потому что согласно этому уравнению все точки прямой имеют одинаковые абсциссы $(x=a)$ и, следовательно, расположены на одном расстоянии от оси Oy («справа», если a — число положительное, «слева», если a — число отрицательное); a есть величина отрезка, который отсекает прямая на оси Ox (считая от начала координат; см. рис. 40).

В частности, если $a=0$, то *прямая совпадает с осью Oy*. Таким образом, *уравнение*

$$x=0$$

определяет ось ординат.

3) $A=0$ $(B\neq 0)$; *уравнение имеет вид* $By+C=0$ *и определяет прямую, параллельную оси Ox.*

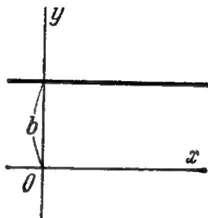


Рис. 41.

Это устанавливается аналогично предыдущему случаю. Заметим только, что если положить $-\frac{C}{B}=b$, то уравнение $By+C=0$ примет вид

$$y=b;$$

число b есть общий для всех точек прямой «уровень расположения» (рис. 41) и вместе с тем величина отрезка, который отсекает прямая на оси Oy (считая от начала координат).

В частности, если $b=0$, то *прямая совпадает с осью Ox*. Таким образом, *уравнение*

$$y=0$$

определяет ось абсцисс.

63. Пусть теперь дано уравнение

$$Ax+By+C=0$$

при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C не равен нулю. Такое уравнение может быть приведено к некоторому специальному виду, который бывает удобен в ряде задач аналитической геометрии.

Перенесем свободный член C в правую часть уравнения; получим:

$$Ax+By=-C.$$

Поделим затем обе части уравнения на $-C$; тогда будем

иметь:

$$\frac{Ax}{-C}+\frac{By}{-C}=1$$

или

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}}+\frac{y}{-\frac{C}{B}}=1.$$

Вводя обозначения

$$a=-\frac{C}{A},$$
$$b=-\frac{C}{B},$$

получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \qquad (1)$$

Это и есть тот специальный вид уравнения прямой, который мы хотели получить.

Существенно, что числа a и b имеют весьма простой геометрический смысл. Именно, a и b суть величины отрезков, которые прямая отсекает на координатных осях, считая каждый от начала координат (рис. 42). Чтобы убедиться в этом, найдем точки пересечения прямой с координатными осями. Точка пересечения прямой с осью Ox определяется путем совместного решения уравнения этой прямой и уравнения оси Ox:

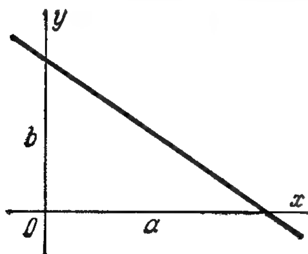


Рис. 42.

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}&=1,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Отсюда $x=a$, $y=0$. Таким образом, величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Ox, действительно равна a. Аналогично устанавливается, что величина отрезка, отсекаемого прямой на оси Oy, равна b.

Уравнение вида (1) принято называть *уравнением прямой «в отрезках»*. Эту форму уравнения, в частности, удобно использовать для построения прямой на чертеже.

Пример. Дана прямая

$$3x - 5y + 15 = 0.$$

Составить для этой прямой уравнение «в отрезках» и построить прямую на чертеже.

Решение. Для данной прямой уравнение «в отрезках» имеет вид

$$\frac{x}{-5} + \frac{y}{3} = 1.$$

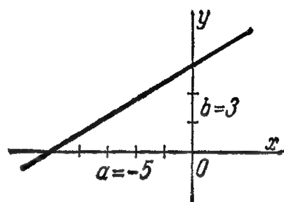


Рис. 43.

Мы получим эту прямую на чертеже, если отложим на координатных осях Ox и Oy отрезки, величины которых соответственно равны $a = -5$, $b = 3$, и соединим их концы (рис. 43).

§ 21. Совместное исследование уравнений двух прямых

64. Пусть дана система двух уравнений первой степени:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Каждое из уравнений (1) в отдельности определяет прямую. Каждое их совместное решение определяет общую точку этих прямых.

Будем исследовать систему (1) и дадим результатам исследования геометрическое истолкование.

Предположим, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. В этом случае определитель системы не равен нулю:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Значит, система совместна и имеет единственное решение*); соответственно, прямые, определяемые уравнениями системы, пересекаются в одной точке; следовательно, *эти прямые различны и не параллельны друг другу*. Координаты точки

*) См. Приложение, n°2.

пересечения находятся из уравнений (1) при помощи формул:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-C_1 & B_1\\ -C_2 & B_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}A_1 & -C_1\\ A_2 & -C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}$$

или

$$x=\frac{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}},\qquad y=\frac{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}. \tag{2}$$

Предположим теперь, что $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$. Здесь в свою очередь имеются две возможности: либо $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\neq\frac{C_1}{C_2}$, либо $\frac{A_1}{A_2}=$ $=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$.

Рассмотрим первую из них. Обозначим каждое из равных отношений $\frac{A_1}{A_2}$ и $\frac{B_1}{B_2}$ буквой q; тогда имеем: $A_1=A_2q$, $B_1=B_2q$, $C_1\neq C_2q$. Помножим второе из уравнений (1) на q и вычтем полученное соотношение из первого уравнения; получим $C_1-C_2q=0$. Это соотношение противоречиво, так как $C_1\neq$ $\neq C_2q$. Но оно вытекает из системы (1); следовательно, уравнения системы (1) ни при каких численных значениях аргументов x, y не могут быть одновременно правильными равенствами, т. е. система (1) не имеет совместных решений. В данном случае *уравнения* (1) *определяют прямые, не имеющие ни одной общей точки, т. е. параллельные.*

Рассмотрим вторую из двух указанных выше возможностей:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Полагая каждое из этих отношений равным q, найдем: $A_1=A_2q$, $B_1=B_2q$, $C_1=C_2q$. Таким образом, при умножении левой части второго уравнения на некоторое число q мы получаем левую часть первого уравнения. Следовательно, уравнения (1) равносильны. Следовательно, *оба уравнения* (1) *определяют одну и ту же прямую.*

Примеры: 1) Прямые

$$3x+4y-1=0,$$
$$2x+3y-1=0$$

пересекаются, так как $\frac{3}{2} \neq \frac{4}{3}$. Координаты точки пересечения суть $x = -1$, $y = +1$.

2) Прямые

$$2x + 3y + 1 = 0,$$
$$4x + 6y + 3 = 0$$

параллельны, так как $\frac{2}{4} = \frac{3}{6} \neq \frac{1}{3}$. (Система данных уравнений, очевидно, несовместна, так как, умножая первое из них на 2 и отнимая от второго, получим противоречивое равенство $1 = 0$.)

3) Прямые

$$x + y + 1 = 0,$$
$$2x + 2y + 2 = 0$$

совпадают друг с другом, так как данные уравнения равносильны.

Замечание. *Соотношение* $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ *называют условием параллельности прямых*

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0, \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

хотя, как мы видели, при этом условии прямые могут быть либо параллельными, либо совпадающими. Таким образом, говоря, что соотношение $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$ есть условие параллельности двух прямых, нужно условиться случай, когда две прямые совпадают, рассматривать в качестве особого (предельного) случая их параллельности.

65. Из рассуждений предыдущего пункта непосредственно вытекает следующее важное предложение.

Два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

определяют одну прямую в том и только в том случае, когда их коэффициенты пропорциональны, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Это предложение в дальнейшем будет использоваться.

§ 22. Нормальное уравнение прямой. Задача вычисления расстояния от точки до прямой

66. Здесь мы рассмотрим один специальный вид записи уравнения прямой, известный под названием нормального уравнения прямой.

Пусть дана какая-нибудь прямая. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную к данной, — мы будем называть ее *нормалью*, — и пометим буквой P точку, в которой она пересекает данную прямую (рис. 44).

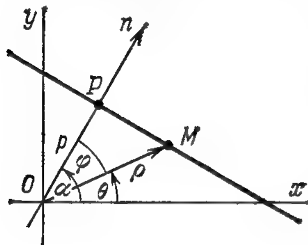


Рис. 44.

На нормали мы введем положительное направление от точки O к точке P (если точка P совпадает с точкой O, т. е. если данная прямая проходит через начало координат, то положительное направление нормали выберем произвольно). Таким образом, нормаль является осью.

Обозначим через α угол от оси Ox до направленной нормали, через p — длину отрезка $\overline{OP}$.

Угол α будем понимать как в тригонометрии и будем называть его полярным углом нормали.

Мы выведем сейчас уравнение данной прямой, считая известными числа α и p. С этой целью возьмем на прямой произвольную точку M и обозначим через x, y ее координаты; очевидно, проекция отрезка $\overline{OM}$ на нормаль равна OP, а так как положительное направление нормали совпадает с направлением отрезка $\overline{OP}$, то величина этого отрезка выражается положительным числом, именно числом p:

$$\text{пр}_n \overline{OM} = p. \qquad (1)$$

Найдем выражение проекции отрезка $\overline{OM}$ на нормаль через координаты точки M. С этой целью обозначим через φ угол наклона отрезка $\overline{OM}$ к нормали, через ρ, θ — полярные координаты точки M. Согласно n° 20 имеем:

$$\text{пр}_n \overline{OM} = \rho\cos\varphi = \rho\cos(\alpha - \theta) = \rho(\cos\alpha\cos\theta + \sin\alpha\sin\theta) =$$
$$= (\rho\cos\theta)\cos\alpha + (\rho\sin\theta)\sin\alpha = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$\text{пр}_n \overline{OM} = x \cos \alpha + y \sin \alpha. \qquad (2)$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$, или

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0. \qquad (3)$$

Это и есть уравнение данной прямой (ему, как мы видим, удовлетворяют координаты x, y каждой точки M, лежащей на данной прямой; если же точка M не лежит на данной прямой, то ее координаты уравнению (3) не удовлетворяют, так как тогда $\text{пр}_n \overline{OM} \neq p$).

Уравнение прямой, написанное в форме (3), *называется* ***нормальным****; в этом уравнении α обозначает полярный угол нормали, p — расстояние от начала координат до прямой.*

67. Пусть дана произвольная прямая. Построим ее нормаль n (назначив на нормали положительное направление так, как было описано в предыдущем n°). Пусть, далее, M^* — какая угодно точка плоскости, d — ее расстояние от данной прямой (рис. 45).

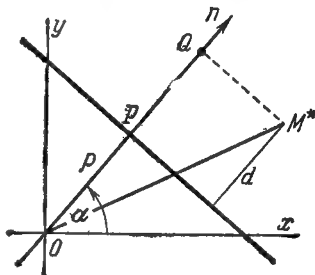


Рис. 45.

Условимся называть *отклонением* точки M^* от данной прямой число $+d$, если M^* лежит по ту сторону от прямой, куда идет положительное направление нормали, и $-d$, если M^* лежит с другой стороны от данной прямой. Отклонение точки от прямой будем обозначать буквой δ; таким образом: $\delta = \pm d$, причем полезно заметить, что $\delta = +d$, когда точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от прямой, и $\delta = -d$, когда точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от прямой (для точек, лежащих на прямой, $\delta = 0$).

Одной из стандартных задач аналитической геометрии является задача вычисления отклонения точки от прямой. Эта задача решается следующей теоремой:

Теорема 10. *Если точка M^* имеет координаты $(x^*; y^*)$, а прямая задана нормальным уравнением*

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$

то отклонение точки M^* от этой прямой дается формулой

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p. \qquad (4)$$

Доказательство. Спроектируем точку M^* на нормаль; пусть Q — ее проекция (рис. 45). Мы имеем:

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

где PQ, OQ и OP суть величины направленных отрезков $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OP}$, расположенных на нормали. Но $OQ = \text{пр}_n\, \overline{OM^*}$, $OP = p$; следовательно,

$$\delta = \text{пр}_n\, \overline{OM^*} - p. \qquad (5)$$

Согласно формуле (2) n° 66, примененной к точке M^*, имеем:

$$\text{пр}_n\, \overline{OM^*} = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha. \qquad (6)$$

Из равенств (5) и (6) получаем:

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p.$$

Тем самым теорема доказана.

Заметим теперь, что $x^* \cos\alpha + y^* \sin\alpha - p$ есть не что иное, как левая часть нормального уравнения данной прямой, где вместо текущих координат подставлены координаты точки M^*. Отсюда получаем следующее правило:

Чтобы найти отклонение какой-либо точки M^* от некоторой прямой, нужно в левую часть нормального уравнения этой прямой вместо текущих координат подставить координаты точки M^*. Полученное число и будет равно искомому отклонению.

Замечание. Расстояние точки от прямой равно модулю (абсолютной величине) отклонения этой точки: $d = |\delta|$. Следовательно, если требуется найти расстояние точки от прямой, то достаточно вычислить по только что указанному правилу отклонение и взять его модуль.

68. Мы видели, что задача вычисления отклонения точки от прямой легко решается, если прямая задана нормальным уравнением. Теперь мы покажем, как привести общее уравнение прямой к нормальному виду. Пусть

$$Ax + By + C = 0 \qquad (7)$$

— общее уравнение некоторой прямой, а

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0 \tag{3}$$

— ее нормальное уравнение.

Так как уравнение (7) и (3) определяют одну и ту же прямую, то согласно n° 65 коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это означает, что, помножив все члены уравнения (7) на некоторый множитель μ, мы получим уравнение

$$\mu A x + \mu B y + \mu C = 0,$$

совпадающее с уравнением (3), т. е. мы будем иметь:

$$\mu A = \cos \alpha, \ \mu B = \sin \alpha, \ \mu C = -p. \tag{8}$$

Чтобы найти множитель μ, возведем первые два из этих равенств в квадрат и сложим; получим:

$$\mu^2 (A^2 + B^2) = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1.$$

Отсюда

$$\mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{9}$$

Число μ, по умножении на которое общее уравнение прямой приобретает нормальный вид, называется *нормирующим множителем* этого уравнения. Нормирующий множитель определяется формулой (9), но не вполне: остается неопределенным его знак.

Для определения знака нормирующего множителя используем третье из равенств (8). Согласно этому равенству μC есть число отрицательное. Следовательно, *знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена нормируемого уравнения.*

Замечание. Если $C = 0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать по желанию.

Пример. Даны прямая $3x - 4y + 10 = 0$ и точка M (4; 3). Найти отклонение точки M от данной прямой.

Решение. Чтобы применить правило, изложенное в n° 67, нам нужно прежде всего привести данное уравнение к нормальному виду. С этой целью находим нормирующий множитель

$$\mu = \frac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = -\frac{1}{5}.$$

Умножая данное уравнение на μ, получим искомое нормальное уравнение

$$-\frac{1}{5}(3x-4y+10)=0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M, имеем:

$$\delta=-\frac{1}{5}(3\cdot 4-4\cdot 3+10)=-2.$$

Итак, точка M имеет отрицательное отклонение от данной прямой и удалена от нее на расстояние $d=2$.

§ 23. Уравнение пучка прямых

69. Совокупность всех прямых плоскости, проходящих через некоторую точку $S(x_0;\ y_0)$, называется *пучком* прямых с центром S. В аналитической геометрии часто встречается потребность, зная уравнения двух прямых пучка, найти уравнение некоторой третьей прямой того же пучка при условии, что направление этой третьей прямой так или иначе описано. Задачи такого типа можно решать, используя, например, уравнение (7) n° 56: $y-y_1=k(x-x_1)$, где в качестве x_1, y_1 следует брать координаты x_0, y_0 центра пучка (угловой коэффициент k находится соответственно тому, как задано направление искомой прямой). При этом, однако, приходится предварительно вычислять координаты x_0, y_0 центра пучка.

Следующее предложение позволяет в подобных случаях избежать вычисления координат x_0, y_0.

Пусть $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$ — уравнения двух прямых, пересекающихся в точке S, и α, β — какие угодно числа, не равные одновременно нулю; тогда

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \qquad (1)$$

есть уравнение прямой, проходящей через точку S.

Доказательство. Прежде всего установим, что соотношение (1) есть действительно уравнение. Для этого запишем его в виде

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)=0 \qquad (2)$$

и докажем, что величины $\alpha A_1+\beta A_2$ и $\alpha B_1+\beta B_2$ не могут быть обе равными нулю. Предположим противное, т. е. что

$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0$ и $\alpha B_1 + \beta B_2 = 0$; но тогда $\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$ и $\frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}$. Так как числа α и β не равны нулю одновременно, то отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ не может быть неопределенным; поэтому из предыдущих равенств следует пропорция $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$. Однако коэффициенты A_1, B_1 не могут быть пропорциональными коэффициентам A_2, B_2, так как данные прямые пересекаются (см. n° 64). Таким образом, наше предположение приходится отвергнуть. Итак, $\alpha A_1 + \beta A_2$ и $\alpha B_1 + \beta B_2$ одновременно исчезнуть не могут, а это и означает, что равенство (2) есть уравнение (с переменными x и y). Далее, непосредственно ясно, что *оно является уравнением первой степени*, и, следовательно, определяет некоторую прямую. Остается доказать, что эта прямая проходит через точку S. Пусть x_0, y_0 — координаты точки S. Так как каждая из данных прямых проходит через точку S, то $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0$ и $A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0$, откуда

$$\alpha (A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta (A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Мы видим, что координаты точки S удовлетворяют уравнению (1), следовательно, прямая, определяемая уравнением (1), проходит через точку S, и наше предложение доказано.

Таким образом, уравнение вида (1) при всяких значениях α, β, не равных одновременно нулю, определяет прямые пучка с центром S.

Теперь мы докажем, что *в уравнении* (1) *числа* α, β *всегда можно подобрать так, чтобы оно определило любую* (заранее назначенную) *прямую пучка с центром* S. Так как каждая прямая пучка с центром S определяется заданием, кроме точки S, еще одной своей точки, то для доказательства высказанного утверждения достаточно установить, что в уравнении (1) числа α, β всегда возможно подобрать так, чтобы определяемая им прямая прошла через любую заранее назначенную точку $M^*(x^*; y^*)$.

Но это ясно; в самом деле, прямая, определяемая уравнением (1), будет проходить через точку M^*, если координаты точки M^* удовлетворяют этому уравнению, т. е. если

$$\alpha (A_1x^* + B_1y^* + C_1) + \beta (A_2x^* + B_2y^* + C_2) = 0. \qquad (3)$$

Будем считать, что точка M^* не совпадает с точкой S (только этот случай нам и нужен). Тогда хотя бы одно из чисел

$$A_1x^*+B_1y^*+C_1, \quad A_2x^*+B_2y^*+C_2$$

не равно нулю, следовательно, равенство (3) является не тождеством, а уравнением, именно, уравнением первой степени с двумя неизвестными α, β; чтобы найти неизвестные α, β, нужно одной из них придать численное значение произвольно, а другую вычислить из этого уравнения; например, если $A_2x^*+B_2y^*+C_2 \neq 0$, то α можно взять каким угодно (не равным нулю), а β соответственно определить равенством:

$$\beta = -\frac{A_1x^*+B_1y^*+C_1}{A_2x^*+B_2y^*+C_2}\alpha.$$

Итак, уравнением вида (1) можно определить прямую, проходящую через какую угодно заранее указанную точку плоскости, а значит, и любую прямую пучка с центром S. Поэтому уравнение вида (1) называют *уравнением пучка прямых* (*с центром* S).

Если $\alpha \neq 0$, то, полагая $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$, получим из уравнения (1):

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0. \qquad (4)$$

В таком виде уравнение пучка прямых в практике решения задач более употребительно, чем уравнение (1). Существенно, однако, заметить, что, так как при переходе от уравнения (1) к уравнению (4) исключается случай $\alpha=0$, то уравнением вида (4) нельзя определить прямую $A_2x+B_2y+C_2=0$; т. е. уравнение вида (4) при различных λ определяет все прямые пучка, кроме одной (второй из двух данных).

Пример. Даны две прямые $2x+3y-5=0$, $7x+15y+1=0$, пересекающиеся в точке S. Составить уравнение прямой, которая проходит через точку S и перпендикулярна к прямой $12x-5y-1=0$.

Решение. Прежде всего проверим утверждение условия задачи: данные прямые действительно пересекаются, так как $\frac{2}{7} \neq \frac{3}{15}$. Далее составим уравнение пучка прямых с центром S:

$$2x+3y-5+\lambda(7x+15y+1)=0. \qquad (5)$$

Чтобы выделить в этом пучке искомую прямую, вычислим λ согласно условию перпендикулярности этой прямой к прямой $12x-5y-1=0$.

Представив уравнение (5) в виде

$$(2+7\lambda)x+(3+15\lambda)y+(-5+\lambda)=0, \qquad (6)$$

находим угловой коэффициент искомой прямой:

$$k=-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}.$$

Данная прямая имеет угловой коэффициент

$$k_1=\frac{12}{5}.$$

По условию перпендикулярности $k=-\frac{1}{k_1}$, т. е.

$$-\frac{2+7\lambda}{3+15\lambda}=-\frac{5}{12}.$$

Отсюда $\lambda=-1$. Подставляя $\lambda=-1$ в уравнение (6), получаем $-5x-12y-6=0$ или

$$5x+12y+6=0.$$

Задача решена.

ГЛАВА 5

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ЛИНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

В этой главе будут рассмотрены три вида линий второго порядка: эллипсы, гиперболы и параболы. Основной целью главы является ознакомление читателя с важнейшими геометрическими свойствами указанных линий.

§ 24. Эллипс. Определение эллипса и вывод его канонического уравнения

70. *Эллипсом называется геометрическое место точек, для которых сумма расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина;* требуется, чтобы эта постоянная была *больше расстояния между фокусами.* Фокусы эллипса принято обозначать через F_1 и F_2.

Замечание. Сумма расстояний произвольной точки M от двух фиксированных точек F_1 и F_2, очевидно, не может быть меньше расстояния между точками F_1, F_2. Эта сумма равна расстоянию между F_1, F_2 в том и только в том случае, когда точка M находится на отрезке F_1F_2. Следовательно, геометрическое место точек, сумма расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1, F_2, есть постоянная величина, равная расстоянию между F_1, F_2, представляет собой просто отрезок F_1F_2. Указанный случай исключен оговоркой в конце предыдущего определения.

71. Пусть M — произвольная точка эллипса с фокусами F_1 и F_2. Отрезки F_1M и F_2M (так же как и длины этих отрезков) называются *фокальными радиусами* точки M. По-

стоянную сумму фокальных радиусов точки эллипса принято обозначать через $2a$. Таким образом, для любой точки M эллипса имеем:

$$F_1M + F_2M = 2a. \tag{1}$$

Расстояние F_1F_2 между фокусами обозначают через $2c$. Так как

$$F_1M + F_2M > F_1F_2,$$

то

$$2a > 2c, \text{ т. е. } a > c. \tag{2}$$

Из определения эллипса непосредственно вытекает следующий способ построения его при помощи нити: если концы нерастяжимой нити длины $2a$ закрепить в точках F_1, F_2 и натянуть нить острием карандаша, то при движении острия оно будет вычерчивать эллипс с фокусами F_1, F_2 и суммой фокальных радиусов $2a$. Выполнив это построение фактически, можно наглядно убедиться, что эллипс представляет собой выпуклую замкнутую линию (овал), симметричную относительно прямой F_1F_2, а также относительно прямой, которая проходит перпендикулярно к отрезку F_1F_2 через его середину (рис. 46). Немного далее мы установим форму эллипса аналитически при помощи исследования его уравнения; уравнение эллипса выводится в следующем пункте.

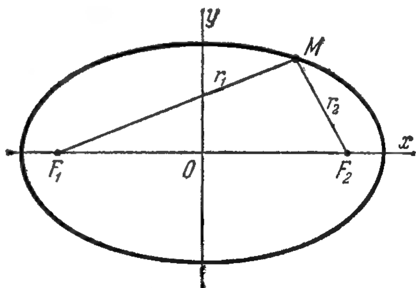


Рис. 46.

72. Пусть дан какой-нибудь эллипс с фокусами F_1, F_2 (вместе с тем мы считаем данными a и c). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к этому эллипсу; именно, в качестве оси абсцисс мы возьмем прямую F_1F_2, считая ее направленной от F_1 к F_2, начало координат поместим в середине отрезка F_1F_2 (рис. 46). Выведем уравнение эллипса в установленной системе координат.

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим, далее, через r_1 и r_2 расстояния от точки M до фокусов ($r_1 = F_1M$, $r_2 = F_2M$). Точка M будет находиться на данном эллипсе в том и только в том случае, когда

$$r_1 + r_2 = 2a. \tag{3}$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве (3) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через координаты x, y.

Заметим, что так как $F_1F_2 = 2c$ и так как фокусы F_1 и F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(+c;\ 0)$; приняв это во внимание и применяя формулу (2) n° 18, находим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{4}$$

Заменяя r_1 и r_2 в равенстве (3) найденными выражениями, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a. \tag{5}$$

Это и есть уравнение рассматриваемого эллипса в назначенной системе координат, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x;\ y)$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на этом эллипсе. Дальнейшие наши выкладки имеют целью получить уравнение эллипса в более простом виде.

Уединим в уравнении (5) первый радикал, после чего возведем обе части равенства в квадрат; получим:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2, \tag{6}$$

или

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx. \tag{7}$$

Возводя в квадрат обе части последнего равенства, найдем:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2, \tag{8}$$

откуда

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2y^2 = a^2\,(a^2 - c^2). \tag{9}$$

Здесь мы введем в рассмотрение новую величину

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}; \tag{10}$$

геометрический смысл величины b будет раскрыт несколько позднее; сейчас мы только заметим, что $a > c$, следовательно, $a^2 - c^2 > 0$ и величина b — вещественна. Из равенства (10) имеем:

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{11}$$

вследствие чего уравнению (9) можно придать вид

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{12}$$

Докажем, что *уравнение* (12) *есть уравнение данного эллипса*. Этот факт не является самоочевидным, поскольку уравнение (12) получено из уравнения (5) двукратным освобождением от радикалов; очевидно лишь, что уравнение (12) есть следствие уравнения (5). Мы должны доказать, что уравнение (5) в свою очередь есть следствие уравнения (12), т. е. что эти уравнения эквивалентны.

Предположим, что x, y — какие-нибудь два числа, для которых соблюдено равенство (12). Производя предыдущие выкладки в обратном порядке, мы получим из равенства (12) сначала равенство (9), затем равенство (8), которое сейчас запишем в виде

$$a^2[(x-c)^2 + y^2] = (a^2 - cx)^2.$$

Извлекая корень из обеих частей этого равенства, получим

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm(a^2 - cx). \tag{13}$$

Заметим теперь, что в силу равенства (12) должно быть $|x| \leqslant a$. Так как $|x| \leqslant a$ и $c < a$, то $|cx| < a^2$, следовательно, число $a^2 - cx$ положительно. Поэтому в правой части равенства (13) необходимо взять знак плюс. Так мы приходим к равенству (7), после чего получим равенство (6); последнее мы напишем в виде

$$(x+c)^2 + y^2 = [2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}]^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}). \tag{14}$$

Исследуем величину

$$(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2. \tag{15}$$

В силу равенства (12) имеем $x^2 \leqslant a^2$. Далее $|cx| < a^2$, следовательно, число $-2cx$ по абсолютному значению меньше $2a^2$. Наконец, также из равенства (12) заключаем, что $y^2 \leqslant b^2$, т. е. $y^2 \leqslant a^2 - c^2$ или $c^2 + y^2 \leqslant a^2$. Ввиду этих обстоятельств вся сумма в правой части (15) меньше $4a^2$, значит, корень из этой суммы меньше $2a$. Поэтому величина, стоящая внутри скобок в правой части (14), положительна, следовательно, в равенстве (14) перед скобками нужно брать знак плюс. Таким образом, мы получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

откуда сразу следует равенство (5).

Итак, уравнение (5) выводится из уравнения (12), как и уравнение (12) выводится из уравнения (5). Тем самым доказано, что уравнение (12) есть уравнение данного эллипса, поскольку оно эквивалентно уравнению (5).

Уравнение (12) называется *каноническим* уравнением эллипса.

73. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

определяющее эллипс в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, *эллипс есть линия второго порядка.*

§ 25. Исследование формы эллипса

74. Выше, в n° 71, мы описали форму эллипса, исходя из наглядных соображений. Здесь мы проведем исследование формы эллипса путем анализа его канонического уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Подчеркнем прежде всего алгебраическую особенность уравнения (1): *оно содержит члены только с четными степенями текущих координат*.

Указанной алгебраической особенности уравнения (1) соответствует важная геометрическая особенность определяемой им линии, именно: *эллипс, определяемый уравнением*

(1), *симметричен как относительно оси Ox, так и относительно оси Oy.*

В самом деле, если $M(x; y)$ — какая-нибудь точка этого эллипса, т. е. если числа x, y удовлетворяют уравнению (1), то числа x, $-y$ также удовлетворяют уравнению (1); следовательно, точка $M'(x; -y)$ также лежит на этом эллипсе. Но точка $M'(x; -y)$ симметрична точке $M(x; y)$ относительно оси Ox. Таким образом, все точки эллипса расположены парами, симметрично относительно оси Ox. Иначе говоря, если мы перегнем чертеж по оси Ox, то верхняя часть эллипса совместится с его нижней частью. А это и означает, что эллипс симметричен по отношению к оси Ox.

Симметричность рассматриваемого эллипса относительно оси Oy доказывается совершенно аналогично (на основании того, что если числа x, y удовлетворяют уравнению (1), то ему удовлетворяют и числа $-x$, y).

Чтобы исследовать форму эллипса, выразим из уравнения (1) величину y как функцию от x:

$$y = \pm\sqrt{b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)}$$

или

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}. \qquad (2)$$

Поскольку эллипс симметричен относительно каждой из координатных осей, нам достаточно рассмотреть лишь ту его часть, которая лежит в первой координатной четверти.

Так как указанная часть эллипса лежит в верхней полуплоскости, то ей соответствует знак $+$ в правой части уравнения (2); а так как она вместе с тем лежит в правой полуплоскости, то для всех ее точек $x \geqslant 0$. Таким образом, мы должны изобразить график функции

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2} \qquad (3)$$

при условии $x \geqslant 0$.

Возьмем сначала $x=0$, тогда $y=b$. Точка $B(0; b)$ является самой левой точкой рассматриваемого графика. Пусть теперь x увеличивается, начиная от нуля. Очевидно, что при увеличении x подкоренное выражение в формуле (3) будет уменьшаться; вместе с тем, следовательно, будет

уменьшаться и величина y. Таким образом, переменная точка $M(x; y)$, описывающая рассматриваемый график, движется вправо и вниз (рис. 47). Когда x сделается равным a, мы получим $y=0$; тогда точка $M(x; y)$ совпадает с точкой $A(a; 0)$, лежащей на оси Ox. При дальнейшем увеличении x, т. е. при $x > a$, подкоренное выражение в формуле (3) становится отрицательным, а значит, y — мнимым. Отсюда следует, что точка A является самой правой точкой графика. Итак, частью эллипса, расположенной в первой координатной четверти, является дуга BA, изображение которой дано на рис. 47.

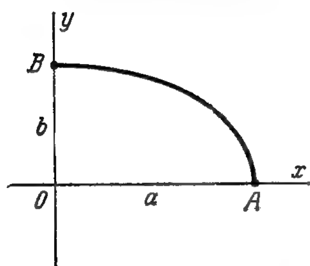


Рис. 47.

Производя зеркальные отражения дуги BA относительно координатных осей, мы получим весь эллипс; он имеет форму выпуклого овала с двумя взаимно перпендикулярными осями симметрии (рис. 48).

Оси симметрии эллипса называют обычно просто его *осями*, а точку пересечения осей — *центром* эллипса. Точки, в которых эллипс пересекает свои оси, называются его *вершинами*. На рис. 48 вершины эллипса суть точки A, A', B и B'.

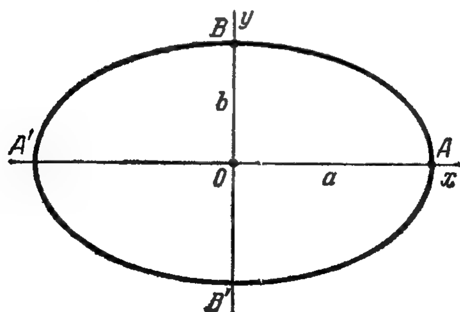


Рис. 48.

Заметим, что осями эллипса принято называть также отрезки $AA'=2a$ и $BB'=2b$. Если эллипс расположен относительно координатных осей так, как было описано в n° 72, именно,

если фокусы его находятся на оси Ox, то $b=\sqrt{a^2-c^2}$, следовательно, $a>b$.

В этом случае отрезок $OA=a$ называют *большой полуосью* эллипса, отрезок $OB=b$ — *малой полуосью*. Но, само собой разумеется, эллипс, определяемый уравнением вида (1), может быть расположен так, что его фокусы будут на оси Oy; тогда $b>a$ и большой полуосью его будет отрезок $OB=b$. Но во всяком случае длина отрезка OA на оси абсцисс обозначается через a, а длина отрезка OB на оси ординат обозначается через b.

Замечание. На рис. 47 часть эллипса, расположенная в первой координатной четверти, изображена в виде дуги BA всюду выпуклой «вверх»; кроме того, на рис. 47 показано, что направление этой дуги в точке B перпендикулярно к оси Oy, а в точке A перпендикулярно к оси Ox (вследствие чего полный эллипс в своих вершинах не имеет заострений). Между тем мы не доказали, что дуга BA действительно обладает такими свойствами. Но мы не будем этим заниматься, так как такого рода исследования графиков наиболее естественно проводить при помощи методов математического анализа.

75. В частном случае, когда $b=a$, уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

принимает вид

$$x^2+y^2=a^2;$$

такое уравнение определяет окружность радиуса a (с центром в начале координат). В соответствии с этим окружность рассматривается как частный случай эллипса.

§ 26. Эксцентриситет эллипса

76. *Эксцентриситетом эллипса называется отношение расстояния между фокусами этого эллипса к длине его большой оси*; обозначив эксцентриситет буквой ε, получаем:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Так как $c<a$, то $\varepsilon<1$, т. е. *эксцентриситет каждого эллипса меньше единицы.*

Заметим, что $c^2=a^2-b^2$; поэтому

$$\varepsilon^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

отсюда

$$\varepsilon=\sqrt{1-\left(\frac{b}{a}\right)^2} \text{ и } \frac{b}{a}=\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением осей эллипса, а отношение осей, в свою очередь, определяется эксцентриситетом. Таким образом, *эксцентриситет характеризует форму эллипса*. Чем ближе эксцентриситет к единице, тем меньше $1-\varepsilon^2$, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, *чем больше эксцентриситет, тем более эллипс вытянут*. В случае окружности $b=a$ и $\varepsilon=0$.

§ 27. Рациональные выражения фокальных радиусов эллипса

77. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, лежащую на данном эллипсе. Если r_1 и r_2—фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1=\sqrt{(x+c)^2+y^2}, \quad r_2=\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{1}$$

Оказывается, для выражения фокальных радиусов можно указать другие формулы, свободные от иррациональностей.

В самом деле, из равенства (7) n° 72 мы имеем:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x.$$

Полагая здесь $\frac{c}{a}=\varepsilon$ и принимая во внимание вторую из формул (1), получим:

$$r_2=a-\varepsilon x,$$

по определению эллипса $r_1+r_2=2a$; отсюда и из предыдущего

$$r_1=a+\varepsilon x.$$

Итак, имеют место формулы

$$\left.\begin{aligned} r_1&=a+\varepsilon x,\\ r_2&=a-\varepsilon x.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

В § 34 эти формулы будут существенно использованы.

§ 28. Построение эллипса по точкам. Параметрические уравнения эллипса

78. Пусть дан эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{1}$$

Опишем вокруг его центра две окружности, одну — радиусом a, другую — радиусом b (считаем $a > b$); проведем через

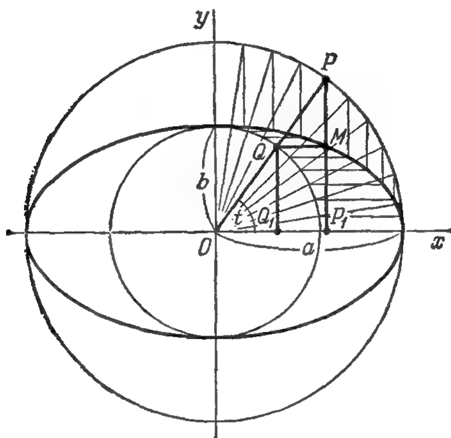


Рис. 49.

центр эллипса произвольный луч и обозначим буквой t полярный угол этого луча (рис. 49). Проведенный луч пересечет бо́льшую окружность в некоторой точке P, меньшую — в некоторой точке Q. Проведем затем через точку P прямую, параллельную оси Oy, через точку Q — прямую, параллельную оси Ox; пусть M — точка пересечения этих прямых, а P_1 и Q_1 — проекции точек P и Q на ось абсцисс.

Выразим координаты точки M через t. Из рис. 49 легко усмотреть, что

$$x = OP_1 = OP\cdot\cos t = a\cos t,$$

$$y = P_1M = Q_1Q = OQ\cdot\sin t = b\sin t.$$

Таким образом,

$$\left.\begin{array}{l} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Подставляя эти координаты в уравнение (1), убедимся, что они удовлетворяют ему при любом t. Следовательно, точка M находится на данном эллипсе. Итак, мы показали, как построить одну точку эллипса. Проводя ряд лучей и производя указанное построение соответственно каждому из них, мы можем построить столько точек эллипса, сколько пожелаем. Этот прием часто употребляется в чертежной практике (соединяя построенные точки с помощью лекал, можно получить изображение эллипса, вполне удовлетворительное с практической точки зрения).

79. Уравнения (2) выражают координаты произвольной точки эллипса как функции переменного параметра t; таким образом, уравнения (2) представляют собой параметрические уравнения эллипса (см. § 14).

§ 29. Эллипс как проекция окружности на плоскость. Эллипс как сечение круглого цилиндра

80. Здесь мы докажем, что *проекция окружности на произвольную плоскость является эллипсом.*

Пусть окружность k, лежащая в плоскости β, проектируется на некоторую плоскость α. Обозначим через k' геометрическое место проекций всех точек окружности k; нужно показать, что k' есть эллипс. Для удобства рассуждений будем предполагать, что плоскость α проходит через центр окружности k (рис. 50). Введем на плоскости α декартову прямоугольную систему координат, приняв в качестве оси Ox прямую, по которой пересекаются плоскости α и β, в качестве начала координат — центр окружности k. Обозначим через a радиус окружности k, через φ — острый угол между плоскостями α и β. Пусть P — произвольная точка окружности k, M — ее проекция на плоскость α, Q — проекция на ось Ox, t — угол, который составляет отрезок OP с осью Ox. Выразим координаты точки M через t. Из рис. 50 легко усмотреть, что

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = QM = QP \cdot \cos\varphi = OP \cdot \sin t \cos\varphi = a \cos\varphi \sin t.$$

Обозначив постоянную величину $a \cos\varphi$ буквой b, получим:

$$x = a \cos t,$$
$$y = b \sin t.$$

Эти уравнения в точности совпадают с параметрическими уравнениями эллипса (см. n° 78); следовательно, линия k' является эллипсом (с большой полуосью a и малой полуосью $b = a\cos\varphi$).

81. Легко показать также, что *каждое сечение круглого цилиндра плоскостью, не параллельной его оси, есть эллипс.*

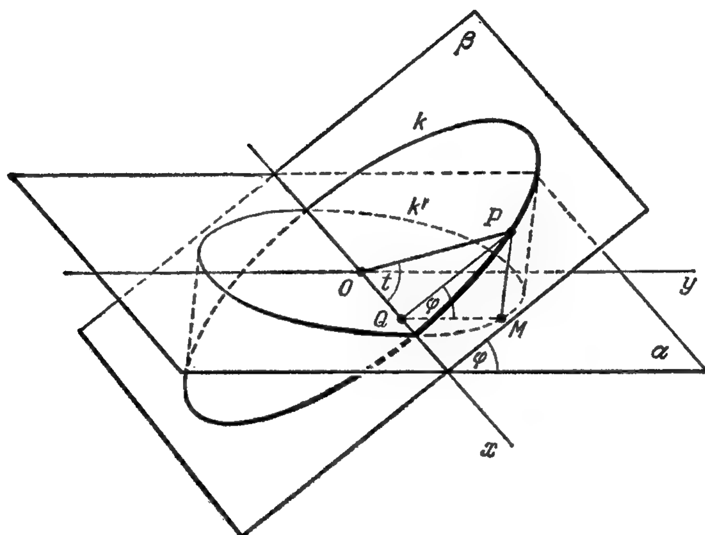


Рис. 50.

Для доказательства рассмотрим какой-нибудь круглый цилиндр и секущую плоскость α (рис. 51); линию, которая образуется в сечении, обозначим через k'. Пусть O — точка, в которой плоскость α пересекает ось цилиндра; проведем через точку O плоскость β, перпендикулярную к оси. Эта плоскость пересечет цилиндр по окружности k. Обозначим через a радиус этой окружности, через φ — острый угол между плоскостями α и β. Выберем затем на плоскости α координатные оси так, как показано на рис. 51. Возьмем на линии k' произвольную точку M; пусть P — ее проекция на плоскость β, Q — проекция на ось Ox, t — угол, который составляет отрезок OP с осью Ox. Выразим координаты

точки M через t, имеем:

$$x = OQ = OP \cdot \cos t = a \cos t,$$
$$y = QM = \frac{QP}{\cos \varphi} = \frac{OP \cdot \sin t}{\cos \varphi} = \frac{a}{\cos \varphi} \sin t.$$

Полагая $\frac{a}{\cos \varphi} = b$, получим:

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t.$$

Эти уравнения представляют собой параметрические

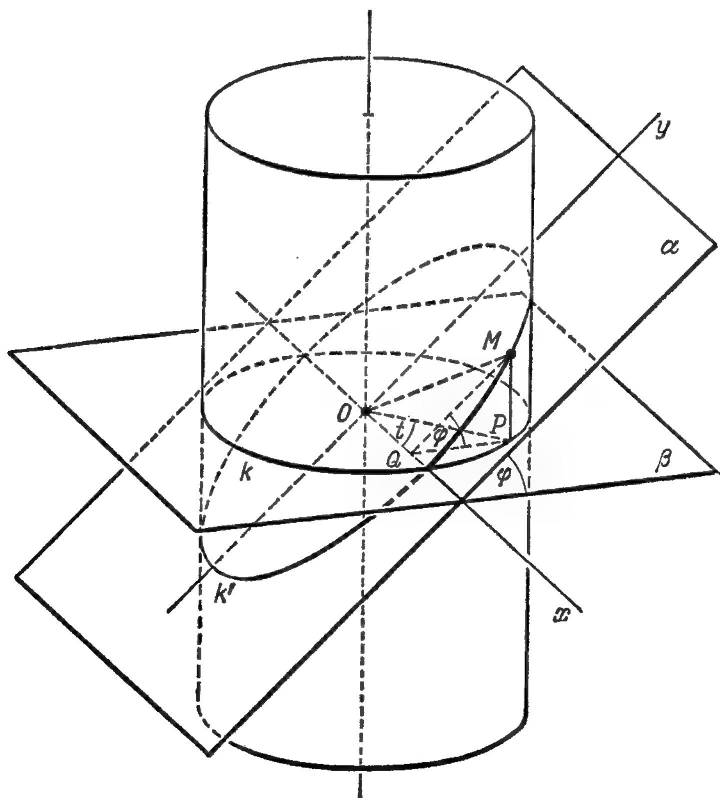


Рис. 51.

уравнения эллипса; таким образом, линия k' является эллипсом, что и требовалось доказать.

Заметим, что $\frac{a}{\cos\varphi} > a$; следовательно, a есть малая ось эллипса k', $b = \frac{a}{\cos\varphi}$ — его большая ось, т. е. эллипс k' вытянут в направлении оси Oy.

То обстоятельство, что эллипс есть плоское сечение круглого цилиндра, а также проекция окружности на плоскость, делает представление об этой линии особенно наглядным.

§ 30. Гипербола. Определение гиперболы и вывод ее канонического уравнения

82. *Гиперболой называется геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек плоскости, называемых фокусами, есть постоянная величина*; указанная разность берется *по абсолютному значению*; кроме того, требуется, чтобы она была *меньше расстояния между фокусами и отлична от нуля*. Фокусы гиперболы принято обозначать через F_1 и F_2, а расстояние между ними — через $2c$.

Замечание. Разность расстояний от произвольной точки M до двух фиксированных точек F_1, F_2, очевидно, не может быть больше расстояния между точками F_1, F_2. Эта разность равна расстоянию между F_1, F_2 в том и только в том случае, когда точка M находится на одном из продолжений отрезка F_1F_2. Следовательно, геометрическое место точек, для которых разность расстояний от двух фиксированных точек F_1, F_2 есть постоянная величина, равная расстоянию между F_1, F_2, представляет собой оба продолжения отрезка F_1F_2 (рис. 52).



Рис. 52.

Если разность расстояний от некоторой точки M до точек F_1, F_2 равна нулю, то эта точка равноудалена от F_1 и F_2. Следовательно, геометрическое место точек, разность расстояний от которых до двух фиксированных точек F_1, F_2 есть постоянная величина, равная нулю, представляет собой прямую, перпендикулярную к отрезку F_1F_2 в его середине (рис. 53).

Указанные случаи исключены оговоркой в конце предыдущего определения.

83. Пусть M — произвольная точка гиперболы с фокусами F_1 и F_2 (рис. 54). Отрезки F_1M и F_2M (так же, как и длины этих отрезков) называются *фокальными радиусами* точки M и обозначаются через r_1 и r_2 ($F_1M = r_1$, $F_2M = r_2$). По определению гиперболы разность фокальных радиусов ее точки M есть постоянная величина (т. е. при изменении положения точки M на гиперболе разность ее фокальных радиусов не меняется); эту постоянную принято обозначать через $2a$. Таким образом, для любой точки M гиперболы имеем либо

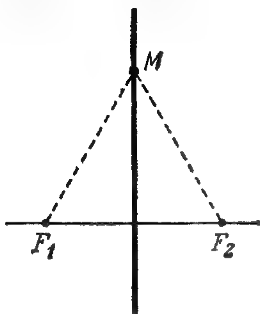


Рис. 53.

$$F_1M - F_2M = 2a, \tag{1}$$

если точка M находится ближе к фокусу F_2, либо

$$F_2M - F_1M = 2a, \tag{2}$$

если точка M находится ближе к фокусу F_1.

Так как по определению гиперболы $F_1M - F_2M < F_1F_2$ и $F_2M - F_1M < F_1F_2$, то $2a < 2c$, т. е.

$$a < c. \tag{3}$$

В следующем пункте мы выведем уравнение гиперболы, после

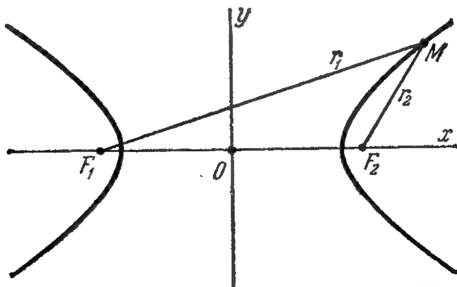


Рис. 54.

чего, анализируя это уравнение, установим ее форму. Мы увидим, что гипербола состоит из двух отдельных частей, называемых ее ветвями, каждая из которых бесконечно прос-

тирается в двух направлениях; целая гипербола симметрична относительно прямой F_1F_2, а также относительно прямой, проходящей перпендикулярно к отрезку F_1F_2 через его середину (см. рис. 54).

84. Пусть дана какая-нибудь гипербола с фокусами F_1, F_2 (вместе с тем будем считать данными a и c). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к этой гиперболе; именно, в качестве оси абсцисс мы возьмем прямую F_1F_2, считая ее направленной от F_1 к F_2, начало координат поместим в середину отрезка F_1F_2 (рис. 54).

Выведем уравнение гиперболы в установленной системе координат. Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y, а фокальные радиусы F_1M и F_2M через r_1 и r_2. Точка M будет находиться на (данной) гиперболе в том и только в том случае, когда $r_1 - r_2 = 2a$, или $r_2 - r_1 = 2a$. Последние два равенства мы объединим общей записью

$$r_1 - r_2 = \pm 2a. \qquad (4)$$

Чтобы получить искомое уравнение гиперболы, нужно в равенстве (4) заменить переменные r_1 и r_2 их выражениями через текущие координаты x, y. Так как $F_1F_2 = 2c$ и так как фокусы F_1, F_2 расположены на оси Ox симметрично относительно начала координат, то они имеют соответственно координаты $(-c;\ 0)$ и $(+c;\ 0)$; приняв это во внимание и применяя формулу (2°) n° 18, находим:

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \qquad (5)$$

Заменяя r_1 и r_2 в равенстве (4) найденными выражениями, получаем:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (6)$$

Это и есть уравнение рассматриваемой гиперболы в назначенной системе координат, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x;\ y)$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на данной гиперболе (фактически, мы здесь имеем два уравнения — одно для правой, другое для левой ветви гиперболы).

Дальнейшие выкладки имеют целью получить уравнение гиперболы в более простом виде. Уединим в уравнении (6)

первый радикал, после чего возведем обе части равенства в квадрат; получим:

$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2, \qquad (7)$$

или

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \qquad (8)$$

Возводя в квадрат обе части этого равенства, найдем:

$$c^2x^2-2a^2cx+a^4=a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2, \qquad (9)$$

откуда

$$(c^2-a^2)\,x^2-a^2y^2=a^2\,(c^2-a^2). \qquad (10)$$

Здесь мы введем в рассмотрение новую величину

$$b=\sqrt{c^2-a^2}; \qquad (11)$$

геометрический смысл величины b будет раскрыт несколько позднее; сейчас мы только заметим, что $c>a$ (см. n° 83), следовательно, $c^2-a^2>0$ и величина b вещественна. Из равенства (11) имеем:

$$b^2=c^2-a^2,$$

вследствие чего уравнению (10) можно придать вид

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2,$$

или

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (12)$$

Докажем, что *уравнение* (12) *есть уравнение данной гиперболы*. Этот факт не является самоочевидным, поскольку уравнение (12) получено из уравнения (6) двукратным освобождением от радикалов; очевидно лишь, что уравнение (12) есть следствие уравнения (6).

Мы должны доказать, что уравнение (6) в свою очередь есть следствие уравнения (12), т. е. что эти уравнения эквивалентны.

Предположим, что x, y — какие-нибудь два числа, для которых выполняется равенство (12). Производя предыдущие выкладки в обратном порядке, мы получим из равенства (12) сначала равенство (10), затем равенство (9), которое сейчас

запишем в виде

$$(cx-a^2)^2=a^2[(x-c)^2+y^2].$$

Извлекая корень из обеих частей этого равенства, получим:

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}. \tag{13}$$

Если точка (x, y) находится в левой полуплоскости, то $x<0$ и левая часть равенства (13) отрицательна. В этом случае, следовательно, в правой части равенства (13) нужно брать знак минус. Если же точка (x, y) находится в правой полуплоскости, то $x>0$; согласно уравнению (12) имеем $x \geqslant a$. Так как $c>a$, то $cx>a^2$, следовательно, левая часть равенства (13) положительна; значит, в данном случае в правой части равенства (13) нужно брать знак плюс. Таким образом, равенство (13) имеет тот же смысл, что и равенство (8). Производя надлежащие преобразования, мы получим из равенства (8) равенство (7); последнее мы напишем в виде

$$(x+c)^2+y^2=[\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a]^2.$$

Отсюда

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm(\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a). \tag{14}$$

Выясним, какой знак нужно брать в правой части этого равенства перед скобками. Рассмотрим два случая.

1) Точка $(x; y)$ находится в правой полуплоскости; тогда согласно предыдущему внутри скобок следует выбрать знак плюс, вся величина в скобках будет положительна, значит, и перед скобками нужно брать положительный знак.

2) Точка $(x; y)$ находится в левой полуплоскости. В этом случае x — число отрицательное, значит, абсолютная величина разности $x-c$ равна сумме $|x|+c$. Согласно уравнению (12) имеем $|x| \geqslant a$; кроме того, $c>a$. Следовательно, $(x-c)^2>4a^2$, сумма $(x-c)^2+y^2$ тем более превышает $4a^2$, корень из этой суммы больше $2a$ и вся величина внутри скобок в правой части равенства (14) снова положительна. Таким образом, и в этом случае в равенстве (14) перед скобками нужно брать знак плюс. Мы видим, что при любом расположении точки (x, y) равенство (14) приводится

к виду

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\pm 2a,$$

откуда сразу получается равенство (6).

Итак, уравнение (6) выводится из уравнения (12), как и уравнение (12) выводится из уравнения (6). Тем самым доказано, что уравнение (12) есть уравнение данной гиперболы, поскольку оно эквивалентно уравнению (6).

Уравнение (12) называется *каноническим уравнением гиперболы.*

85. Уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

определяющее гиперболу в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, *гипербола есть линия второго порядка.*

§ 31. Исследование формы гиперболы

86. Займемся исследованием гиперболы, определенной уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1. \qquad (1)$$

Выразим из уравнения (1) величину y как функцию от x:

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}$$

или

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (2)$$

Так как уравнение (1) содержит члены только с четными степенями каждой из текущих координат x, y, то определяемая им гипербола симметрична относительно каждой из координатных осей (доказывается так же, как аналогичное утверждение для эллипса; см. n° 74); отсюда ясно, что достаточно рассмотреть лишь часть гиперболы, лежащую в первой координатной четверти.

Так как указанная часть гиперболы лежит в верхней полуплоскости, то в уравнении (2) ей соответствует знак

$+$; а так как она вместе с тем лежит в правой полуплоскости, то для всех ее точек $x \geqslant 0$. Таким образом, мы должны исследовать функцию

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (3)$$

при условии $x \geqslant 0$ и изобразить ее график.

Возьмем сначала $x = 0$. Подставляя $x = 0$ в правую часть формулы (3), найдем $y = \frac{b}{a}\sqrt{-a^2}$; мы получаем мнимое число. При возрастании x величина y остается мнимой до тех пор, пока x не станет равным a. Полагая в правой части формулы (3) $x = a$, найдем $y = 0$. Следовательно, точка $A(a;\ 0)$ является самой левой точкой графика. При дальнейшем возрастании x величина y будет вещественной и положительной уже все время; это сразу видно из формулы (3), так как при $x > a$ имеем $x^2 - a^2 > 0$. Из формулы (3) видно также, что y является возрастающей функцией от x (если $x \geqslant a$), т. е. каждый раз, когда увеличивается x, увеличивается также и y. Наконец, из формулы (3) видно, что при бесконечном возрастании x происходит бесконечное же возрастание y (при $x \to +\infty$ также и $y \to +\infty$). Сопоставляя все, что было сейчас сказано, приходим к следующему заключению: при возрастании x, начиная от $x = a$, переменная точка $M(x;\ y)$, описывающая график, движется все время «вправо» и «вверх», имея своим начальным положением точку $A(a;\ 0)$; удаление точки M как от оси Oy «вправо», так и от оси Ox «вверх» является бесконечным (рис. 55).

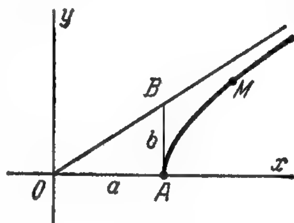


Рис. 55.

87. Присмотримся более внимательно к тому, как именно точка M «уходит в бесконечность».

С этой целью мы наряду с уравнением

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}, \qquad (4)$$

которое при $x \geqslant a$ определяет изучаемую сейчас часть

гиперболы, рассмотрим еще уравнение

$$y = +\frac{b}{a}x; \tag{5}$$

оно определяет прямую с угловым коэффициентом $k = \frac{b}{a}$, проходящую через начало координат. Часть этой прямой, расположенная в первой координатной четверти, изображена на рис. 55 (для построения ее использован прямоугольный треугольник OAB с катетами $OA = a$ и $AB = b$; очевидно, прямая OB как раз и имеет угловой коэффициент $k = \frac{b}{a}$).

Мы докажем, что *точка M, уходя в бесконечность, неограниченно приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$.*

Возьмем произвольное значение x $(x \geqslant a)$ и рассмотрим две точки: $M(x;\ y)$ и $N(x;\ Y)$, где

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2},$$

$$Y = \frac{b}{a}x.$$

Точка $M(x;\ y)$ лежит на гиперболе (4), точка $N(x;\ Y)$ — на прямой (5); поскольку обе эти точки имеют одну и ту же абсциссу x, прямая, соединяющая точки M и N, перпендикулярна к оси Ox (рис. 56). Подсчитаем длину отрезка MN.

Прежде всего заметим, что

$$Y = +\frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y. \tag{6}$$

Отсюда $Y > y$ и, следовательно, $MN = Y - y$. Но

$$Y - y = \frac{b}{a}\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right) = \frac{b}{a}\,\frac{\left(x - \sqrt{x^2 - a^2}\right)\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)}{x + \sqrt{x^2 - a^2}},$$

т. е.

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}. \tag{7}$$

Проанализируем полученное выражение, предполагая, что $x \to +\infty$. Знаменатель его представляет собой сумму двух положительных бесконечно растущих слагаемых; сле-

довательно, при $x \to +\infty$ знаменатель стремится к (положительной) бесконечности. Числитель этого выражения есть постоянная величина ab. Сопоставляя эти два обстоятельства, заключаем, что при $x \to +\infty$ правая часть равенства (7) стремится к нулю; значит, стремится к нулю и $MN = Y - y$.

Обозначим через P основание перпендикуляра, опущенного из точки M на прямую $y = \frac{b}{a}x$ (MP — расстояние от точки M до этой прямой). Очевидно $MP < MN$, а так как $MN \to 0$, то, следовательно, и $MP \to 0$. А это мы и хотели доказать.

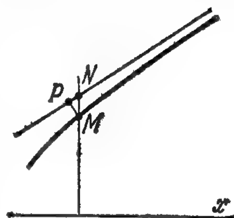


Рис. 56.

Итак, *если переменная точка M уходит в бесконечность по той части гиперболы* (1), *которая расположена в первой координатной четверти, то расстояние от точки M до прямой $y = \frac{b}{a}x$ стремится к нулю.*

88. Пусть Г — *какая-нибудь* линия, M — переменная точка на ней, a — некоторая прямая. Если возможно такое движение точки M по линии Г, что 1) точка M уходит в бесконечность, 2) при этом расстояние от точки M до прямой a стремится к нулю, — то говорят, что *линия* Г *асимптотически приближается к прямой a*. Прямая a в таком случае называется *асимптотой* линии Г.

Употребляя только что указанную терминологию, мы можем следующим образом сформулировать результат исследования, проведенного в n° 87:

График функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$ (т. е. рассматриваемая часть гиперболы) *асимптотически приближается к прямой $y = \frac{b}{a}x$ при $x \to +\infty$*; или *прямая $y = \frac{b}{a}x$ есть асимптота графика функции $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$* (и в то же время асимптота нашей гиперболы).

89. Мы отметим еще некоторые дополнительные особенности расположения гиперболы относительно ее асимптоты (все еще имея в виду только часть гиперболы, лежащую в первой координатной четверти).

Рассмотрим снова точки $M(x; y)$ и $N(x; Y)$, о которых шла речь в n° 87, и вспомним, что точка M лежит на гиперболе, N — на асимптоте. Как установлено в n° 87, имеет место неравенство $Y > y$. Отсюда следует, что точка M всегда находится «ниже» точки N. Иначе говоря, *часть гиперболы* (1), *расположенная в первой координатной четверти, на всем протяжении лежит «ниже» своей асимптоты.*

Далее, на основании формулы (7) имеем:

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Знаменатель этой дроби, будучи при $x \geqslant a$ вещественным и положительным, возрастает при возрастании x. Так как числитель здесь является постоянной величиной, то в силу указанного обстоятельства сама дробь при возрастании x всегда убывает. Таким образом, мы можем утверждать, что если x монотонно стремится к положительной бесконечности (т. е. все время только возрастает), то $MN = Y - y$ стремится к нулю также монотонно (т. е. все время убывая).

Пусть φ — угол наклона прямой $y = \frac{b}{a}x$ к оси Ox, P — основание перпендикуляра, опущенного на эту прямую из точки M; тогда, очевидно,

$$MP = MN \cdot \cos\varphi. \tag{8}$$

Так как MN стремится к нулю монотонно, а $\cos\varphi$ есть постоянная, из формулы (8) следует, что и MP стремится к нулю монотонно.

Иначе говоря, где бы ни была расположена на гиперболе (4) точка M (в первой координатной четверти), если она передвигается по гиперболе «вправо», то расстояние от нее до асимптоты все время уменьшается. Это обстоятельство мы выразим следующим образом: *приближение гиперболы к своей асимптоте является монотонным.*

90. Подведем итог всему, что было сказано в n°n° 86—89. *Часть рассматриваемой гиперболы, лежащая в первой координатной четверти, исходит из точки* $A(a; 0)$ *и идет бесконечно «направо» и «вверх», асимптотически приближаясь к прямой* $y = \frac{b}{a}x$, *притом «снизу» и монотонно.*

В согласии с только что сформулированным предложением и выполнен рис. 55.

Замечание. Существенны еще два свойства рассматриваемого графика: 1) направление его в точке $A(a;\ 0)$ перпендикулярно к оси Ox, 2) своей выпуклостью он обращен везде «вверх». Мы не будем, однако, доказывать выполнение этих свойств, так как такого рода исследование графиков наиболее естественно проводить средствами математического анализа.

91. После того как исследована часть гиперболы (4), лежащая в первой координатной четверти, общий вид целой

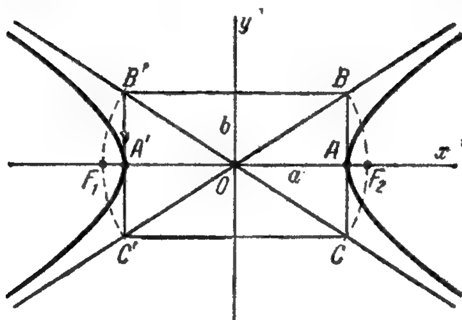


Рис. 57.

гиперболы может быть легко установлен при помощи зеркальных отражений относительно координатных осей.

Гипербола, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

изображена на рис. 57. Легко понять, что она (целая гипербола) *имеет две асимптоты*

$$y=\frac{b}{a}x$$

и

$$y=-\frac{b}{a}x;$$

первая из этих прямых нам уже знакома, вторая представляет собой ее зеркальное отражение относительно оси Ox (или оси Oy).

Оси симметрии гиперболы называют обычно просто ее *осями*, точку пересечения осей — *центром* гиперболы. (В данном случае мы имеем дело с гиперболой, оси которой совмещены с осями координат.) Одна из двух осей (в данном случае та, которая совмещена с осью Ox) пересекает гиперболу, другая ее не пересекает. Точки пересечения гиперболы с осью называются ее *вершинами*; гипербола имеет две вершины (на рис. 57 они обозначены буквами A и A').

Прямоугольник со сторонами $2a$ и $2b$, расположенный симметрично относительно осей гиперболы и касающийся ее в вершинах, мы будем называть *основным прямоугольником* гиперболы (на рис. 57 это прямоугольник $BB'C'C$). Диагонали основного прямоугольника гиперболы совпадают с ее асимптотами.

Заметим, что в математической литературе принято также называть осями гиперболы отрезки длиной $2a$ и $2b$, соединяющие середины противоположных сторон основного прямоугольника. Соответственно этому говорят, что *уравнение*

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

определяет гиперболу с полуосями a и b.

Замечание. Если требуется сделать эскиз гиперболы с полуосями a и b, то следует прежде всего построить ее основной прямоугольник, затем асимптоты. После этого может быть изображена сама гипербола либо «на-глаз», либо с предварительным нанесением на чертеж нескольких ее точек. На рис. 57 показано пунктиром, как построить фокусы гиперболы, имея ее основной прямоугольник; это построение очевидным образом основано на равенстве $c^2=a^2+b^2$ (которое следует из формулы (11) n° 84).

92. Рассмотрим теперь уравнение вида:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{9}$$

При помощи перестановки букв x и y, a и b оно сводится к уравнению, изученному в предыдущих параграфах. Отсюда ясно, что уравнение (9) определяет гиперболу, расположенную так, как показано на рис. 58 (вершины ее B и B'

лежат на оси Oy). Уравнение (9) также называется каноническим уравнением гиперболы.

93. Две гиперболы, которые определяются уравнениями

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

в одной и той же системе координат и при одних и тех же значениях a и b, называются *сопряженными* друг с другом.

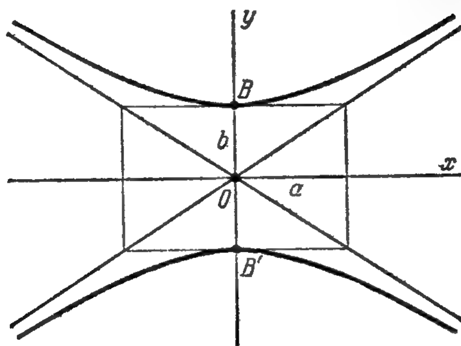


Рис. 58.

94. Гипербола с равными полуосями ($a=b$) называется *равносторонней*. Каноническое уравнение равносторонней гиперболы может быть написано в виде

$$x^2-y^2=a^2.$$

Очевидно, что основной прямоугольник равносторонней гиперболы есть квадрат; отсюда ясно, что *асимптоты равносторонней гиперболы перпендикулярны друг к другу*.

§ 32. Эксцентриситет гиперболы

95. *Эксцентриситетом гиперболы называется отношение расстояния между фокусами этой гиперболы к расстоянию между ее вершинами*; обозначив эксцентриситет буквой ε, получим:

$$\varepsilon=\frac{c}{a}.$$

Так как для гиперболы $c > a$, то $\varepsilon > 1$; т. е. *эксцентриситет каждой гиперболы больше единицы.*

Заметив, что $c^2 = a^2 + b^2$, находим:

$$\varepsilon^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \left(\frac{b}{a}\right)^2;$$

отсюда

$$\varepsilon = \sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad \text{и} \quad \frac{b}{a} = \sqrt{\varepsilon^2 - 1}.$$

Следовательно, эксцентриситет определяется отношением $\frac{b}{a}$, а отношение $\frac{b}{a}$ в свою очередь определяется эксцентриситетом. Таким образом, *эксцентриситет гиперболы характеризует форму ее основного прямоугольника, а значит, и форму самой гиперболы.*

Чем меньше эксцентриситет, т. е. чем ближе он к единице, тем меньше $\varepsilon^2 - 1$, тем меньше, следовательно, отношение $\frac{b}{a}$; значит, *чем меньше эксцентриситет гиперболы, тем более вытянут ее основной прямоугольник* (в направлении оси, соединяющей вершины). В случае равносторонней гиперболы $a = b$ и $\varepsilon = \sqrt{2}$.

§ 33. Рациональные выражения фокальных радиусов гиперболы

96. Рассмотрим произвольную точку $M(x; y)$, лежащую на данной гиперболе. Если r_1 и r_2 — фокальные радиусы этой точки, то

$$r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \tag{1}$$

Оказывается для выражения фокальных радиусов можно указать другие формулы, свободные от иррациональностей.

В самом деле, из равенства (8) n° 84 имеем:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm\left(\frac{c}{a}x - a\right);$$

здесь знак плюс относится к случаю, когда точка M находится на правой ветви гиперболы. Полагая $\frac{c}{a} = \varepsilon$ и

принимая во внимание второе из равенств (1), получим:

$$r_2 = \pm(\varepsilon x - a). \tag{2}$$

Чтобы выразить первый фокальный радиус, воспользуемся основным соотношением: $r_1 - r_2 = \pm 2a$, где знак плюс также относится к точкам правой ветви гиперболы. Из этого соотношения находим $r_1 = r_2 \pm 2a = \pm(\varepsilon x + a)$. Итак, для точек правой ветви гиперболы

$$r_1 = \varepsilon x + a, \qquad r_2 = \varepsilon x - a, \tag{3}$$

для точек левой ветви

$$r_1 = -(\varepsilon x + a), \qquad r_2 = -(\varepsilon x - a). \tag{4}$$

Эти формулы существенно используются в следующем параграфе.

§ 34. Директрисы эллипса и гиперболы

97. Рассмотрим какой-нибудь эллипс и введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы этот эллипс определялся каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Предположим, что рассматриваемый эллипс не является окружностью, т. е. что $a \neq b$ и, следовательно, $\varepsilon \neq 0$. Предположим еще, что этот эллипс вытянут в направлении оси Ox, т. е. что $a > b$.

Две прямые, перпендикулярные к большой оси эллипса и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами эллипса.

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$$x = -\frac{a}{\varepsilon} \quad \text{и} \quad x = +\frac{a}{\varepsilon}.$$

Первую из них мы условимся называть левой, вторую — правой.

Так как для эллипса $\varepsilon < 1$, то $\frac{a}{\varepsilon} > a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена правее правой вершины

эллипса; аналогично, левая директриса расположена левее его левой вершины. Эллипс вместе с директрисами изображен на рис. 59.

98. Рассмотрим какую-нибудь гиперболу и введем декартову прямоугольную систему координат так, чтобы эта

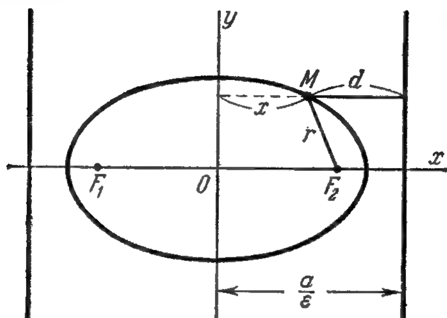


Рис. 59.

гипербола определялась каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Две прямые, перпендикулярные к той оси гиперболы, которая ее пересекает, и расположенные симметрично относительно центра на расстоянии $\frac{a}{\varepsilon}$ от него, называются директрисами гиперболы.

Уравнения директрис в выбранной системе координат имеют вид

$$x=-\frac{a}{\varepsilon} \text{ и } x=+\frac{a}{\varepsilon}.$$

Первую из них мы условимся называть левой, вторую — правой.

Так как для гиперболы $\varepsilon>1$, то $\frac{a}{\varepsilon}<a$. Отсюда следует, что правая директриса расположена между центром и правой вершиной гиперболы; аналогично, левая директриса расположена между центром и левой вершиной. Гипербола вместе с директрисами изображена на рис. 60.

99. Значение директрис эллипса и гиперболы выявляется следующими двумя теоремами.

Теорема 11. *Если r — расстояние от произвольной точки эллипса до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету эллипса:*

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе и правой директрисе. Пусть,

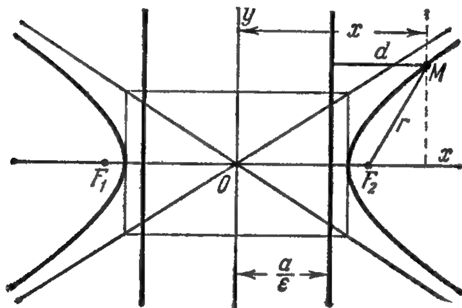


Рис. 60.

$M(x; y)$ — произвольная точка эллипса (см. рис. 59). Расстояние от M до правой директрисы выражается равенством

$$d=\frac{a}{\varepsilon}-x, \tag{1}$$

которое легко усматривается из чертежа; расстояние от точки M до правого фокуса дается второй из формул (2) § 27:

$$r=a-\varepsilon x. \tag{2}$$

Из соотношений (1) и (2) имеем:

$$\frac{r}{d}=\frac{a-\varepsilon x}{\frac{a}{\varepsilon}-x}=\frac{(a-\varepsilon x)\,\varepsilon}{a-\varepsilon x}=\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Теорема 12. *Если r — расстояние от произвольной точки гиперболы до какого-нибудь фокуса, d — расстояние от той же точки до соответствующей этому фокусу директрисы, то отношение $\frac{r}{d}$ есть постоянная величина, равная эксцентриситету гиперболы:*

$$\frac{r}{d}=\varepsilon.$$

Доказательство. Предположим для определенности, что речь идет о правом фокусе и правой директрисе. Пусть $M(x; y)$ — произвольная точка гиперболы (см. рис. 60). Нам придется рассмотреть два случая:

1) Точка M находится на правой половине гиперболы. Тогда расстояние от M до правой директрисы выражается равенством

$$d=x-\frac{a}{\varepsilon}, \tag{3}$$

которое легко усматривается из чертежа. Расстояние от точки M до правого фокуса дается второй из формул (3) § 33:

$$r=\varepsilon x-a. \tag{4}$$

Из соотношений (3) и (4) имеем:

$$\frac{r}{d}=\frac{\varepsilon x-a}{x-\frac{a}{\varepsilon}}=\frac{(\varepsilon x-a)\,\varepsilon}{\varepsilon x-a}=\varepsilon.$$

2) Точка M находится на левой половине гиперболы. Тогда расстояние от M до правой директрисы выражается равенством

$$d=|x|+\frac{a}{\varepsilon}$$

($|x|$ — расстояние от точки M до оси Oy, $\frac{a}{\varepsilon}$ — расстояние от директрисы до оси Oy, d есть сумма этих расстояний); но так как M находится на левой половине гиперболы, то x есть величина отрицательная, следовательно, $|x|=-x$, и мы получаем:

$$d=-x+\frac{a}{\varepsilon}. \tag{5}$$

Расстояние от M до правого фокуса дается второй из

формул (4) § 33:

$$r = -(\varepsilon x - a). \tag{6}$$

Из соотношений (5) и (6) имеем:

$$\frac{r}{d} = \frac{-(\varepsilon x - a)}{-x + \frac{a}{\varepsilon}} = \frac{(-\varepsilon x + a)\varepsilon}{-\varepsilon x + a} = \varepsilon.$$

Теорема доказана.

100. Свойство эллипса и гиперболы, выраженное предыдущими теоремами, можно положить в основу определения этих линий. Именно, *геометрическое место точек, для которых расстояние r от некоторой фиксированной точки (фокуса) и расстояние d до некоторой фиксированной прямой (директрисы) находятся в постоянном отношении*

$$\frac{r}{d} = \varepsilon \qquad (\varepsilon = \text{const}),$$

есть эллипс, если $\varepsilon < 1$, *гипербола, если* $\varepsilon > 1$. (Чтобы убедиться в справедливости такого утверждения, нужно вывести уравнение указанного геометрического места и установить, что полученное уравнение представляет собой уравнение эллипса или гиперболы, соответственно случаям $\varepsilon < 1$ и $\varepsilon > 1$.)

Естественно поставить вопрос, что представляет собой геометрическое место точек, определенное аналогичным образом, но при условии $\varepsilon = 1$, т. е. геометрическое место точек, для каждой из которых $r = d$? Оказывается, это есть некоторая новая для нас линия второго порядка, называемая параболой.

§ 35. Парабола.
Вывод канонического уравнения параболы

101. *Параболой называется геометрическое место точек, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки плоскости, называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой* (предполагается, что эта прямая не проходит через фокус).

Фокус параболы принято обозначать буквой F, расстояние от фокуса до директрисы — буквой p. Величину p называют

параметром параболы. Изображение параболы дано на рис. 61 (исчерпывающее пояснение этого чертежа читатель получит после чтения нескольких следующих пунктов).

Замечание. В соответствии с изложенным в n° 100 говорят, что *парабола имеет эксцентриситет* $\varepsilon = 1$.

102. Пусть дана какая-нибудь парабола (вместе с тем мы считаем заданным параметр p). Введем на плоскости декартову прямоугольную систему координат, оси которой расположим специальным образом по отношению к данной параболе. Именно, ось абсцисс проведем через фокус перпендикулярно к директрисе и будем считать ее направленной от директрисы к фокусу; начало координат расположим посредине между фокусом и директрисой (рис. 61). Выведем уравнение данной параболы в этой системе координат.

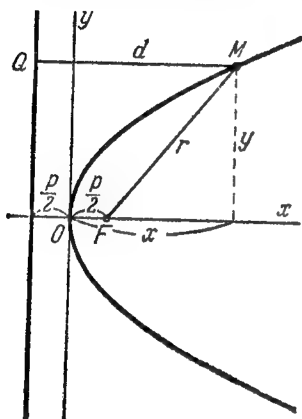


Рис. 61.

Возьмем на плоскости произвольную точку M и обозначим ее координаты через x и y. Обозначим далее через r расстояние от точки M до фокуса ($r = FM$), через d — расстояние от точки M до директрисы. Точка M будет находиться на (данной) параболе в том и только в том случае, когда

$$r = d. \tag{1}$$

Чтобы получить искомое уравнение, нужно в равенстве (1) заменить переменные r и d их выражениями через текущие координаты x, y. Заметим, что фокус F имеет координаты $\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$; приняв это во внимание и применяя формулу (2) n° 18, находим:

$$r = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2}. \tag{2}$$

Обозначим через Q основание перпендикуляра, опущенного из точки M на директрису. Очевидно, точка Q имеет координаты

$\left(-\frac{p}{2};\ y\right)$; отсюда и из формулы (2) n° 18 получаем:

$$d = MQ = \sqrt{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + (y-y)^2} = x+\frac{p}{2} \tag{3}$$

(при извлечении корня мы взяли $x+\frac{p}{2}$ со своим знаком, так как $x+\frac{p}{2}$ — число положительное; это следует из того, что точка $M(x;\ y)$ должна находиться с той стороны от директрисы, где находится фокус, т. е. должно быть $x > -\frac{p}{2}$, откуда $x+\frac{p}{2}>0$). Заменяя в равенстве (1) r и d их выражениями (2) и (3), найдем:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = x+\frac{p}{2}. \tag{4}$$

Это и есть уравнение рассматриваемой параболы в назначенной системе координат, так как ему удовлетворяют координаты точки $M(x;\ y)$ в том и только в том случае, когда точка M лежит на данной параболе.

Имея в виду получить уравнение параболы в более простом виде, возведем обе части равенства (4) в квадрат; получим:

$$x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}, \tag{5}$$

или

$$y^2 = 2px. \tag{6}$$

Уравнение (6) выведено нами как следствие уравнения (4). Легко показать, что уравнение (4) в свою очередь может быть выведено, как следствие уравнения (6). В самом деле, из уравнения (6) очевидным образом («обратным ходом») выводится уравнение (5); далее, из уравнения (5) имеем:

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \pm\left(x+\frac{p}{2}\right).$$

Остается показать, что, если x, y удовлетворяют уравнению (6), то здесь можно выбрать только знак плюс. Но это ясно, так как из уравнения (6) $x=\frac{y^2}{2p}$, следовательно, $x \geqslant 0$, поэтому $x+\frac{p}{2}$ есть число положительное. Мы приходим

к уравнению (4). Поскольку каждое из уравнений (4) и (6) есть следствие другого, они эквивалентны. Отсюда заключаем, что *уравнение* (6) *является уравнением параболы*. Это уравнение называется *каноническим* уравнением параболы.

103. Уравнение $y^2=2px$, определяющее параболу в некоторой системе декартовых прямоугольных координат, есть уравнение второй степени; таким образом, *парабола есть линия второго порядка*.

§ 36. Исследование формы параболы

104. Постараемся при помощи анализа уравнения

$$y^2=2px \tag{1}$$

уяснить себе форму параболы и тем самым обосновать вышеуказанное изображение ее на чертеже.

Так как уравнение (1) включает y только в четной степени, то парабола, которую оно определяет, симметрична относительно оси Ox. Поэтому нам достаточно изучить лишь часть ее, лежащую в верхней полуплоскости. Эта часть параболы определяется уравнением

$$y=+\sqrt{2px}. \tag{2}$$

При отрицательных значениях x уравнение (2) дает мнимые значения y. Следовательно, левее оси Oy ни одной точки параболы нет. При $x=0$ получаем $y=0$. Таким образом, начало координат лежит на параболе и является самой «левой» ее точкой. Пусть теперь x возрастает, начиная от нуля; как видно из уравнения (2), при этом y будет все время возрастать. Из уравнения (2) видно также, что если $x\to+\infty$, то и $y\to+\infty$.

Таким образом, переменная точка $M(x;\ y)$, описывающая рассматриваемую часть параболы, исходит из начала координат и движется «вправо» и «вверх»; удаление точки M как от оси Oy «вправо», так и от оси Ox «вверх» является бесконечным (рис. 62).

З а м е ч а н и е. Существенны еще два свойства параболы: 1) направление ее в точке $O(0;\ 0)$ перпендикулярно к оси Ox, 2) часть параболы, лежащая в верхней полупло-

скости, своей выпуклостью обращена «вверх». Рис. 62 выполнен с учетом этих свойств. Мы не будем, однако, доказывать, что они действительно имеют место, так как такого рода исследование линий наиболее естественно проводить средствами математического анализа.

105. После того, как мы установили форму части параболы, лежащей в верхней полуплоскости, установление формы целой параболы уже не требует ни малейшего труда. Для этого достаточно произвести зеркальное отражение относительно оси Ox. Общее представление о целой параболе, заданной уравнением

$$y^2 = 2px,$$

дает рассмотренный ранее рис. 61.

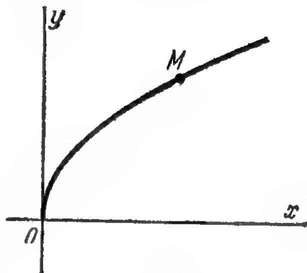


Рис. 62.

Ось симметрии параболы обычно называется просто ее *осью* (в данном случае она совмещена с осью Ox). Точка, в которой парабола пересекает свою ось, называется ее *вершиной* (в данном случае вершина совпадает с началом координат). Число p, т. е. параметр параболы, выражает расстояние от фокуса до директрисы. Геометрический смысл параметра p можно описать еще следующим образом. Возьмем какое-нибудь определенное значение абсциссы, например $x = 1$, и найдем из уравнения (1) соответствующие значения ординаты: $y = \pm\sqrt{2p}$. Мы получаем на параболе две точки $M_1(1; +\sqrt{2p})$ и $M_2(1; -\sqrt{2p})$, симметричные относительно оси; расстояние между ними равно $2\sqrt{2p}$. Таким образом, $2\sqrt{2p}$ есть длина хорды параболы, проведенной перпендикулярно к оси на расстоянии в одну единицу длины от вершины. Мы видим, что длина этой хорды $(=2\sqrt{2p})$ тем больше, чем больше p. Следовательно, параметр p характеризует «ширину» области, ограниченной параболой, при условии, что эта «ширина» измеряется перпендикулярно к оси на определенном расстоянии от вершины.

106. Уравнение

$$y^2 = -2px \tag{3}$$

(при положительном p) сводится к уравнению $y^2 = 2px$ путем замены x на $-x$, т. е. путем преобразования координат, которое соответствует изменению направления оси Ox на противоположное. Отсюда следует, что уравнение $y^2 = -2px$ также определяет параболу, ось которой совмещена с осью Ox, а вершина — с началом координат, но которая расположена в левой полуплоскости (так, как показано на рис. 63).

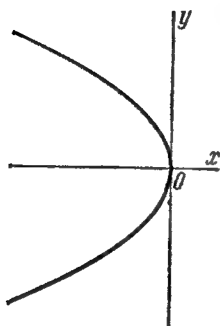
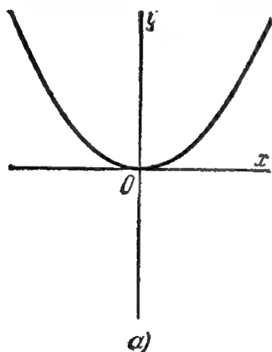


Рис. 63.

107. По аналогии с предыдущим мы можем утверждать, что каждое из уравнений

$$x^2 = 2py,$$
$$x^2 = -2py$$

($p > 0$) определяет параболу с вершиной в начале координат, расположенную симметрично относительно оси Oy (эти уравнения параболы, как и уравнения (1) и (3), называют каноническими). Параболу, определяемую уравнением $x^2 = 2py$, мы будем называть *восходящей*,



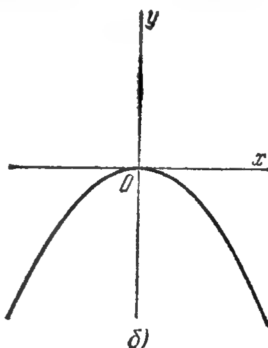


Рис. 64.

определяемую уравнением $x^2 = -2py$, — *нисходящей* (см. соответственно рис. 64, *а* и *б*): эти названия естественны и не требуют разъяснений.

§ 37. Полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы

108. Пользуясь результатами, изложенными в n°n° 99—102, мы *выведем полярное уравнение эллипса, гиперболы и параболы* (по форме записи общее для этих трех линий) *при некотором специальном расположении полярной оси.* Оговоримся, однако, что в случае гиперболы это уравнение определяет линию не целиком, а только одну ее ветвь.

Пусть нам дана какая-нибудь из названных линий: эллипс, гипербола или парабола (если данная линия гипербола, то мы будем рассматривать какую-нибудь одну ее ветвь); обозначим ее буквой L.

Пусть F — фокус линии, g — соответствующая этому фокусу директриса (в случае гиперболы в качестве F и g возьмем фокус и директрису, ближайшие к рассматриваемой ветви).

Введем полярную систему координат так, чтобы полюс совместился с фокусом F, а полярная ось направилась из фокуса по оси линии L в сторону, противоположную директрисе g (рис. 65). Обозначим, как обычно, через ρ, θ полярные координаты произвольной точки M линии L. Чтобы вывести уравнение линии L, будем исходить из соотношения

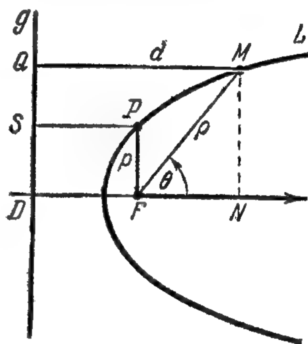


Рис. 65.

$$\frac{r}{d} = \varepsilon, \tag{1}$$

где ε — эксцентриситет линии, а r и d имеют тот же смысл, что и в n°n° 99—102.

Так как полюс совмещен с фокусом F, то

$$r = \rho. \tag{2}$$

Далее,

$$d = QM = DN = DF + FN = DF + \rho \cos \theta. \tag{3}$$

Пусть P — точка, расположенная на линии L так, что отрезок FP перпендикулярен к оси линии L, и p — длина отрезка FP.

Иначе говоря, *p есть половина фокальной хорды линии L, перпендикулярной к ее оси*; эта величина называется *фокальным параметром**) линии L.

Вследствие основного соотношения (1), которое относится ко всем точкам линии L, мы имеем (в частности для точки P):

$$\frac{FP}{SP} = \varepsilon,$$

откуда $SP = \frac{FP}{\varepsilon} = \frac{p}{\varepsilon}$. Но $SP = DF$; следовательно,

$$DF = \frac{p}{\varepsilon}.$$

Из последнего равенства и равенства (3) получаем:

$$d = \frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\theta. \qquad (4)$$

Подставляя теперь в левую часть уравнения (1) вместо r и d их выражения (2) и (4), найдем:

$$\frac{\rho}{\frac{p}{\varepsilon} + \rho\cos\theta} = \varepsilon,$$

откуда

$$\rho = \frac{p}{1 - \varepsilon\cos\theta}. \qquad (5)$$

Это и есть полярное уравнение эллипса, гиперболы (вернее одной ветви гиперболы) и параболы. Здесь p — фокальный параметр, ε — эксцентриситет кривой. Уравнение (5) используется в механике.

§ 38. Диаметры линий второго порядка

109. Важное и неожиданное на первый взгляд свойство линий второго порядка (эллипса, гиперболы и параболы) выражает следующая теорема:

Теорема 13. *Середины параллельных хорд линии второго порядка лежат на одной прямой.*

---

*) В том случае, когда линия L есть парабола, $FP = PS$ (см. n° 101), следовательно, $p = DF$, т. е. p равно расстоянию от фокуса до директрисы. Таким образом, в этом случае величина p совпадает с параметром параболы, с которым мы встречались уже ранее, обозначая его той же буквой.

Доказательство. 1) Пусть данная линия есть эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)$$

(рис. 66). Обозначим через k общий угловой коэффициент параллельных хорд; тогда уравнение каждой из них может быть написано в виде

$$y=kx+l; \qquad (2)$$

здесь l для разных хорд имеет разные значения.

Будем искать концы хорды, определяемой уравнением (2) при каком-нибудь значении l. Решая совместно уравнения (1) и (2), исключим из них y; получим:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(kx+l)^2}{b^2}=1,$$

или

$$(b^2+a^2k^2)\,x^2+2a^2klx+ \\ +a^2(l^2-b^2)=0. \qquad (3)$$

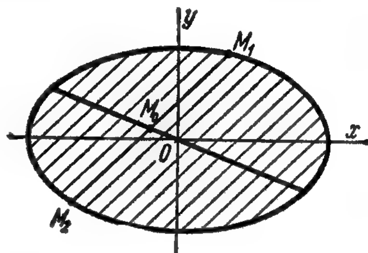


Рис. 66.

Корни x_1, x_2 этого квадратного уравнения суть абсциссы концов M_1, M_2 хорды. Пусть точка M_0 $(x_0;\ y_0)$ — середина этой же хорды; тогда

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Но, по известной теореме о сумме корней квадратного уравнения,

$$x_1+x_2=-\frac{2a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Следовательно,

$$x_0=-\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}.$$

Зная x_0, мы найдем y_0 из уравнения (2):

$$y_0=kx_0+l=-\frac{a^2k^2l}{b^2+a^2k^2}+l=\frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}.$$

Итак,

$$x_0=-\frac{a^2kl}{b^2+a^2k^2}, \qquad y_0=\frac{b^2l}{b^2+a^2k^2}. \qquad (4)$$

Меняя здесь l, мы будем получать координаты середин различных параллельных между собою хорд эллипса, но при этом, как видно из соотношений (4), x_0, y_0 будут неизменно связаны уравнением

$$\frac{y_0}{x_0}=-\frac{b^2}{a^2k},$$

или $y_0 = k'x_0$, где

$$k' = -\frac{b^2}{a^2 k}. \tag{5}$$

Таким образом, середины всех хорд лежат на прямой

$$y = k'x. \tag{6}$$

2) Пусть данная линия есть г и п е р б о л а

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{7}$$

(рис. 67, *а*, *б*). Обозначим через k общий угловой коэффициент параллельных хорд; тогда уравнение каждой из них может быть написано в виде

$$y = kx + l. \tag{8}$$

Заметим заранее, что хорды гиперболы не могут быть параллельными ее асимптотам (так как каждая прямая, параллельная асимптоте, пересекает гиперболу только в одной точке); поэтому $k \neq \frac{b}{a}$ и $k \neq -\frac{b}{a}$.

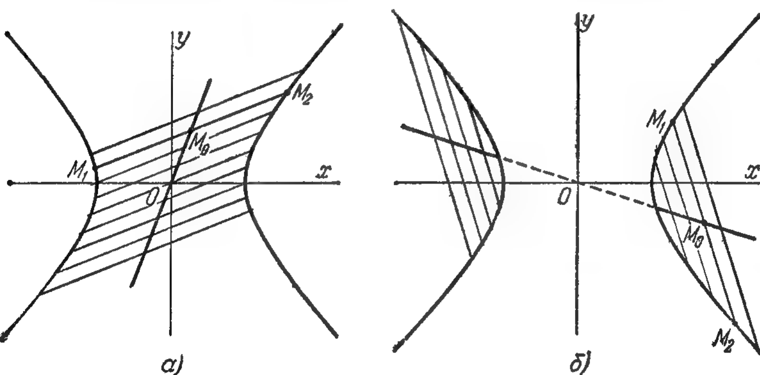


Рис. 67.

Будем искать концы хорды, определяемой уравнением (8) при каком-нибудь значении l. Решая совместно уравнения (7) и (8), исключим из них y; мы получим:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(kx + l)^2}{b^2} = 1,$$

или

$$(b^2 - a^2k^2)\,x^2 - 2a^2klx - a^2(l^2 + b^2) = 0. \tag{9}$$

Так как $k \neq \pm\frac{b}{a}$, то $b^2 - a^2k^2 \neq 0$. Следовательно, уравнение (9)

является квадратным. Корни этого квадратного уравнения x_1, x_2 суть абсциссы концов M_1, M_2 хорды. Пусть $M_0(x_0;\ y_0)$ — середина этой же хорды; тогда

$$x_0=\frac{x_1+x_2}{2}.$$

Применяя теорему о сумме корней квадратного уравнения, находим:

$$x_1+x_2=\frac{2a^2kl}{b^2-a^2k^2}.$$

Следовательно, $x_0=\frac{a^2kl}{b^2-a^2k^2}$. Зная x_0, мы найдем y_0 из уравнения (8):

$$y_0=kx_0+l=\frac{a^2k^2l}{b^2-a^2k^2}+l=\frac{b^2l}{b^2-a^2k^2}.$$

Итак,

$$x_0=\frac{a^2kl}{b^2-a^2k^2},\qquad y_0=\frac{b^2l}{b^2-a^2k^2}. \tag{10}$$

Меняя здесь l, мы будем получать координаты середин различных параллельных между собою хорд гиперболы, но при этом, как видно из соотношений (10), x_0, y_0 будут неизменно связаны уравнением

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{b^2}{a^2k},$$

или $y_0=k'x_0$, где

$$k'=\frac{b^2}{a^2k}. \tag{11}$$

Таким образом, середины всех хорд лежат на прямой

$$y=k'x. \tag{12}$$

3) Пусть, наконец, данная линия есть п а р а б о л а

$$y^2=2px \tag{13}$$

(рис. 68). Обозначим через k общий угловой коэффициент параллельных хорд; тогда уравнение каждой из них может быть написано в виде

$$y=kx+l. \tag{14}$$

Заметим заранее, что хорды параболы не могут быть параллельны ее оси (так как каждая прямая, параллельная оси, пересекает параболу только в одной точке); поэтому $k\neq 0$.

Будем искать концы хорды, определяемой уравнением (14) при каком-нибудь значении l. Решая совместно уравнения (13) и (14), исключим из них y; мы получим:

$$(kx+l)^2-2px=0,$$

или

$$k^2x^2+2(kl-p)x+l^2=0. \tag{15}$$

Так как $k \neq 0$, то уравнение (15) является квадратным. Корни этого уравнения x_1, x_2 суть абсциссы концов M_1, M_2 хорды. Пусть $M_0(x_0; y_0)$ — середина этой же хорды. Мы имеем:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2};$$

по теореме о сумме корней квадратного уравнения

$$x_1 + x_2 = -\frac{2(kl - p)}{k^2}.$$

Следовательно, $x_0 = \frac{p - kl}{k^2}$. Зная x_0, мы найдем y_0 из уравнения (14):

$$y_0 = kx_0 + l = k\frac{p - kl}{k^2} + l = \frac{p}{k}.$$

Итак,

$$x_0 = \frac{p - kl}{k^2}, \qquad y_0 = \frac{p}{k}. \tag{16}$$

Меняя здесь l, мы будем получать координаты середин различных параллельных между собой хорд параболы; при этом, как видно из соотношений (16), y_0 будет оставаться неизменно равным числу $\frac{p}{k}$. Таким образом, середины всех хорд лежат на прямой

$$y = \frac{p}{k}, \tag{17}$$

которая параллельна оси абсцисс и вместе с тем параллельна оси параболы.

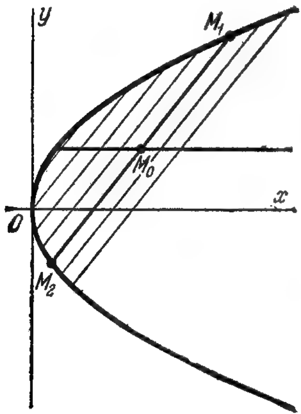


Рис. 68.

Мы могли бы теперь сказать, что теорема доказана вполне, если бы не было одного дефекта в технике наших вычислений. Дело в том, что мы представляли хорды линии второго порядка уравнением с угловым коэффициентом (вида $y = kx + l$). Наши выкладки, следовательно, теряют смысл, если рассматриваемые хорды параллельны оси Oy (так как прямые, параллельные оси Oy, не имеют углового коэффициента). Однако для таких хорд утверждение теоремы сразу вытекает из свойств симметрии эллипса, гиперболы и параболы. В самом деле, эллипс, гипербола и парабола, заданные каноническими уравнениями (1), (7) и (13), симметричны относительно оси Ox. Следовательно, и в том случае, когда хорды этих линий параллельны оси Oy, середины их лежат на одной прямой (на оси Ox).

110. *Прямая, проходящая через середины параллельных хорд линии второго порядка, называется ее диаметром.*

Все диаметры эллипса и гиперболы проходят через центр; это ясно геометрически (так как центр является серединой всякой проходящей через него хорды), а также сразу усматривается из уравнений (6) и (12) n° 109.

Согласно уравнению (17) *все диаметры параболы параллельны ее оси.*

Отметим некоторые свойства диаметров эллипса и гиперболы.

Рассмотрим эллипс

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Пусть k — угловой коэффициент какого-нибудь его диаметра. Проведем параллельно этому диаметру хорды эллипса; геометрическое место их середин есть другой диаметр, который называется *сопряженным* первому. Он имеет угловой коэффициент k', определяемый равенством (5), или

$$kk'=-\frac{b^2}{a^2}. \tag{18}$$

Будем теперь искать диаметр, который сопряжен диаметру с угловым коэффициентом k'; аналогично предыдущему, угловой коэффициент k'' этого нового диаметра определится равенством

$$k'k''=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Отсюда и из (18) находим: $k''=k$.

Таким образом, *если один из двух диаметров эллипса сопряжен другому, то последний сопряжен первому.* Поэтому такие диаметры называются *взаимно сопряженными.* Соотношение (18) называется *условием сопряженности диаметров* (эллипса) *с угловыми коэффициентами* k и k'.

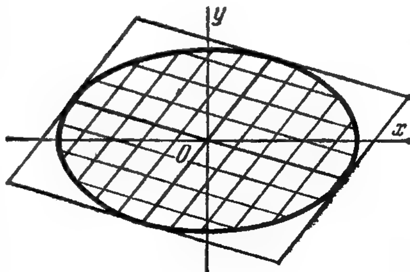


Рис. 69.

Взаимность сопряженных диаметров можно выразить еще так: *если один из двух диаметров эллипса делит пополам хорды, параллельные другому, то последний делит пополам хорды, параллельные первому* (рис. 69; этот чертеж иллюстрирует также интересное следствие предыдущего предложения: касательные к эллипсу в концах его диаметра параллельны между собой и параллельны сопряженному диаметру).

Все, что было сейчас сказано о диаметрах эллипса, непосредственно переносится на диаметры гиперболы. Только условие сопряженности диаметров гиперболы несколько отлично от соотношения (18).

Именно, если гипербола задана уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,$$

то условие сопряженности ее диаметров с угловыми коэффициентами k и k' есть:

$$kk'=\frac{b^2}{a^2}. \tag{19}$$

Оно вытекает из равенства (11).

Замечание. Оси симметрии эллипса и гиперболы суть взаимно сопряженные диаметры, так как каждая из них делит пополам хорды, параллельные другой. Среди всех остальных пар сопряженных диаметров оси симметрии выделяются тем, что являются диаметрами не только сопряженными, но и перпендикулярными друг к другу.

§ 39. Оптические свойства эллипса, гиперболы и параболы

111. К числу наиболее замечательных свойств эллипса, гиперболы и параболы относятся так называемые оптические их свойства. Эти свойства, между прочим, показывают, что название «фокусы» имеет источник в физике.

Мы сформулируем их прежде всего чисто геометрически.

1. Прямая, касающаяся эллипса в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит вне угла F_1MF_2 (рис. 70, *а*).

2. Прямая, касающаяся параболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальным радиусом FM и с лучом, который,

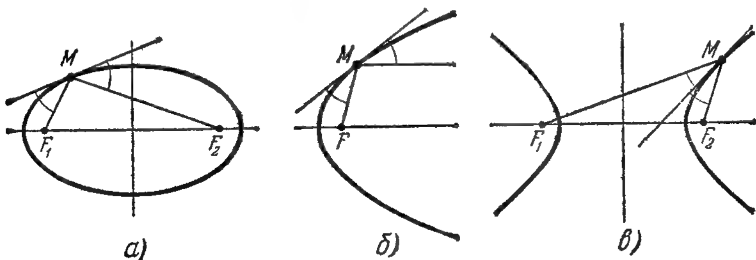


Рис. 70.

исходя из точки M, идет параллельно оси параболы в ту сторону, куда парабола бесконечно простирается (рис. 70, *б*).

3. Прямая, касающаяся гиперболы в некоторой точке M, составляет равные углы с фокальными радиусами F_1M, F_2M и проходит внутри угла F_1MF_2 (рис. 70, *в*).

Мы не будем останавливаться на доказательстве этих свойств. Заметим только, что для доказательства их при помощи вычислений нужно уметь выражать угловой коэффициент касательной, зная уравнение кривой и точку прикосновения. Соответствующие правила даются в курсе математического анализа. Чтобы выявить физический смысл приведенных предложений, представим себе, что эллипс, парабола или гипербола вращается вокруг оси (содержащей фокусы). Тем самым образуется поверхность, называемая соответственно эллипсоидом, параболоидом или гиперболоидом. Реальная поверхность такого вида, покрытая амальгамой, представляет собой, соответственно, эллиптическое, параболическое или гиперболическое зеркало. Принимая во внимание известные в оптике законы отражения света, заключаем, что:

1. Если источник света находится в одном из фокусов эллиптического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, собираются в другом фокусе.

2. Если источник света находится в фокусе параболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут параллельно оси.

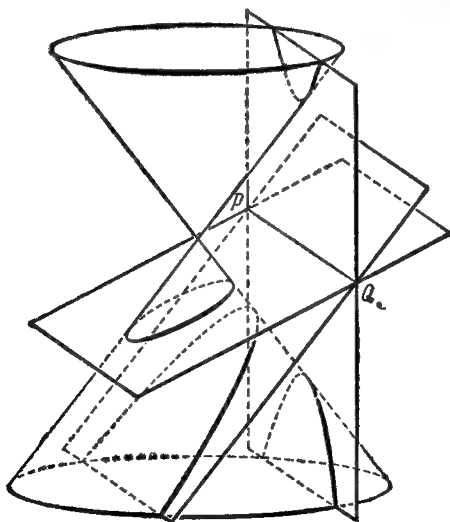


Рис. 71.

3. Если источник света находится в одном из фокусов гиперболического зеркала, то лучи его, отразившись от зеркала, идут далее так, как если бы они исходили из другого фокуса.

На указанном сейчас свойстве параболического зеркала основано устройство прожектора.

§ 40. Эллипс, гипербола и парабола как конические сечения

112. Следующая теорема с новой точки зрения освещает геометрическую природу эллипсов, гипербол и парабол:

Теорема 14. *Сечением любого круглого конуса плоскостью (не проходящей через его вершину) определяется кривая, которая может быть лишь эллипсом, гиперболой или параболой. При этом, если плоскость пересекает только одну полость конуса и по замкнутой кривой, то эта кривая есть эллипс; если секущая плоскость пересекает только одну полость конуса и по незамкнутой кривой, то эта кривая — парабола; если плоскость пересекает обе полости конуса, то в сечении образуется гипербола* (рис. 71).

Справедливость этой теоремы можно установить, исходя из того общего положения, что пересечение поверхности второго порядка плоскостью есть линия второго порядка (см., например, нашу книгу «Квадратичные формы и матрицы» n° 31, 32).

Из рис. 71 легко усмотреть, что, поворачивая секущую плоскость вокруг прямой PQ, мы заставим изменяться кривую сечения. Будучи, например, первоначально эллипсом, она на одно мгновение становится параболой, а затем превращается в гиперболу. Параболой эта кривая будет тогда, когда секущая плоскость параллельна касательной плоскости конуса.

Вследствие сказанного в этом параграфе эллипсы, гиперболы и параболы называются *коническими сечениями*.

ГЛАВА 6

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ УРАВНЕНИЙ ПРИ ИЗМЕНЕНИИ КООРДИНАТ

§ 41. Примеры приведения общего уравнения линии второго порядка к каноническому виду

113. Важной задачей аналитической геометрии является исследование общего уравнения линии второго порядка и приведение его к простейшим (каноническим) формам. Не стремясь решать эту задачу в общем виде, мы поясним в настоящем параграфе только сущность дела, пользуясь конкретными примерами.

Прежде всего сделаем одно замечание технического характера. Ранее (§ 15) мы писали общее уравнение линии второго порядка, т. е. общее уравнение второй степени относительно x, y, в виде

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Однако в большинстве формул теории линий второго порядка коэффициенты B, D и E входят деленными на 2. Поэтому общее уравнение второй степени оказывается целесообразным записывать следующим образом:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0, \qquad (1)$$

т. е. буквами B, D и E обозначать половины соответствующих коэффициентов. Например, если дано уравнение

$$x^2 + 3xy + 2y^2 + 5x + 4y + 1 = 0,$$

то

$$A = 1,\ B = \frac{3}{2},\ C = 2,\ D = \frac{5}{2},\ E = 2,\ F = 1.$$

Числа A, B, C, D, E, F называются *коэффициентами* уравнения (1) (по отношению к B, D и E это название, как видим, условно). Первые три члена уравнения (1), т. е. члены второй степени, называются его *старшими* членами.

Чтобы сразу же показать удобство записи уравнения второй степени в виде (1), обратим внимание на следующее тождество:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F= \\ =(Ax+By+D)\,x+(Bx+Cy+E)\,y+(Dx+Ey+F), \quad (2)$$

проверка которого не составляет труда. Оно показывает, что второй, четвертый и пятый члены уравнения (1) естественно составляются из двух одинаковых экземпляров каждый. Тождество (2) полезно во многих случаях и вскоре будет нами использовано.

114. Пусть дано общее уравнение линии второго порядка:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0. \quad (1)$$

Требуется упростить это уравнение путем перехода к другим координатам (при ином, более выгодном расположении осей).

Уточним предъявляемые требования:

1) нужно добиться, чтобы в группе старших членов исчез член с произведением текущих координат; 2) чтобы число членов первой степени стало наименьшим (если возможно, — совсем их уничтожить); 3) кроме того, если возможно, уничтожить свободный член. Уравнение, получаемое при соблюдении этих требований, называется *каноническим*. Далее практически показывается, как следует выполнять необходимые действия, чтобы привести данное уравнение к каноническому виду.

Пример. Привести к каноническому виду уравнение

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=0. \quad (3)$$

Решение. Прежде всего постараемся упростить уравнение при помощи параллельного переноса координатных осей. Перенесем начало координат в точку $S(x_0;\ y_0)$, которую пока будем считать произвольной. Согласно § 8 получим соответствующее преобразование координат:

$$x=\tilde{x}+x_0, \quad y=\tilde{y}+y_0. \quad (4)$$

Перейдем в левой части уравнения (3) к новым координатам (т. е. заменим x, y их выражениями (4)); после приведения подобных членов

найдем:

$$17x^2+12xy+8y^2-46x-28y+17=$$
$$=17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2+2(17x_0+6y_0-23)\tilde{x}+$$
$$+2(6x_0+8y_0-14)\tilde{y}+(17x_0^2+12x_0y_0+8y_0^2-46x_0-28y_0+17). \quad (5)$$

В преобразованном уравнении данной кривой члены первой степени исчезнут, если мы подберем x_0, y_0 так, чтобы соблюдались равенства:

$$\begin{aligned} 17x_0+6y_0-23=0,\\ 6x_0+8y_0-14=0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решая эти уравнения совместно, получим: $x_0=1$, $y_0=1$. Свободный член преобразованного уравнения, который мы обозначим через $\tilde{F}$, особенно легко подсчитать при помощи тождества (2) с учетом уравнений (6):

$$F=17x_0^2+12x_0y_0+8y_0^2-46x_0-28y_0+17=$$
$$=(17x_0+6y_0-23)x_0+(6x_0+8y_0-14)y_0+$$
$$+(-23x_0-14y_0+17)=-23x_0-14y_0+17=-20.$$

Теперь начало координат новой системы находится в точке S (старые координаты которой $x_0=1$, $y_0=1$). Уравнение в новых координатах имеет вид:

$$17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2-20=0. \quad (7)$$

Заметим, что левая часть уравнения (7) не меняется при замене $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ на $-\tilde{x}$, $-\tilde{y}$. Поэтому, если уравнению (7) удовлетворяют некоторые числа $\tilde{x}$, $\tilde{y}$, то удовлетворяют также числа $-\tilde{x}$, $-\tilde{y}$. Значит, если какая-нибудь точка $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ лежит на данной кривой, то точка $N(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ также лежит на данной кривой. Но точки $M(\tilde{x}, \tilde{y})$ и $N(-\tilde{x}, -\tilde{y})$ симметричны относительно точки S. Таким образом, все точки данной кривой расположены парами, симметрично относительно S (рис. 72). Точка S в этом случае называется центром симметрии, или просто центром данной кривой. Теперь ясен геометрический смысл произведенного преобразования: начало координат перенесено в центр кривой.

Произведем далее поворот перенесенных осей на некоторый угол α. Согласно § 9 получим соответствующее преобразование координат:

$$\begin{aligned} \tilde{x}=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\\ \tilde{y}=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha. \end{aligned} \quad (8)$$

Заменим в левой части уравнения (7) величины $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ их выражениями (8); после приведения подобных членов найдем:

$$17\tilde{x}^2+12\tilde{x}\tilde{y}+8\tilde{y}^2-20=(17\cos^2\alpha+12\cos\alpha\sin\alpha+8\sin^2\alpha)x'^2+$$
$$+2(-17\cos\alpha\sin\alpha+6\cos^2\alpha-6\sin^2\alpha+8\cos\alpha\sin\alpha)x'y'+$$
$$+(17\sin^2\alpha-12\cos\alpha\sin\alpha+8\cos^2\alpha)y'^2-20. \quad (9)$$

Постараемся подобрать угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль. Для этого нам придется решить тригонометрическое уравнение:

$$-17\cos\alpha\sin\alpha+6\cos^2\alpha-6\sin^2\alpha+8\cos\alpha\sin\alpha=0,$$

или

$$6\sin^2\alpha+9\sin\alpha\cos\alpha-6\cos^2\alpha=0.$$

Отсюда

$$6\,\mathrm{tg}^2\,\alpha+9\,\mathrm{tg}\,\alpha-6=0.$$

Решая полученное квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\,\alpha$, найдем: $\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{1}{2}$ или $\mathrm{tg}\,\alpha=-2$. Возьмем первое решение, что соответствует

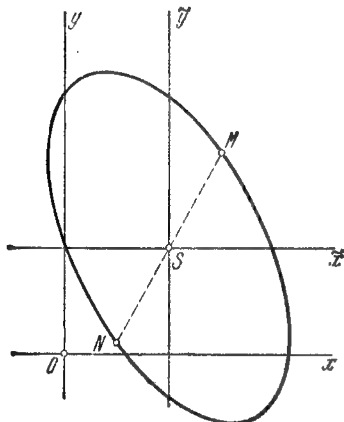


Рис. 72.

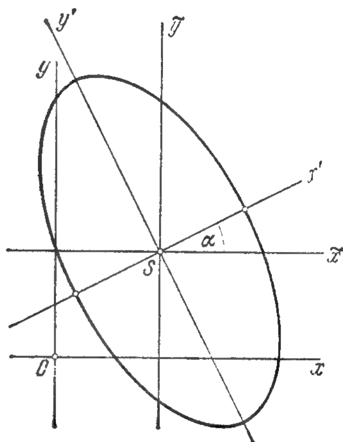


Рис. 73.

повороту координатных осей на острый угол. Зная $\mathrm{tg}\,\alpha$, вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}},$$

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда и согласно (9) находим уравнение данной кривой в системе x', y':

$$20x'^2+5y'^2-20=0$$

или

$$\frac{x'^2}{1}+\frac{y'^2}{4}=1.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипса с полуосями 2 и 1 (большая ось эллипса находится на оси Oy'; см. рис. 73).

115. Если дана кривая второго порядка вообще:

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,$$

то уравнения, определяющие ее центр $S(x_0, y_0)$, напишутся так:

$$\begin{aligned} Ax_0+By_0+D&=0,\\ Bx_0+Cy_0+E&=0. \end{aligned} \tag{10}$$

После переноса начала координат в центр S уравнение данной кривой примет вид:

$$A\tilde{x}^2+2B\tilde{x}\tilde{y}+C\tilde{y}^2+\tilde{F}=0, \tag{11}$$

где $\tilde{F}=Ax_0^2+2Bx_0y_0+Cy_0^2+2Dx_0+2Ey_0+F$. Если применить тождество (2), то

$$\tilde{F}=(Ax_0+By_0+D)x_0+(Bx_0+Cy_0+E)y_0+(Dx_0+Ey_0+F).$$

При условии, что x_0, y_0 являются координатами центра кривой, учитывая (10), найдем:

$$\tilde{F}=Dx_0+Ey_0+F.$$

Чтобы получить уравнения (10) и (11), нужно в общем виде повторить выкладки, с помощью которых мы получили уравнения (6) и (7), когда рассматривали предыдущий пример.

116. Может случиться, что система уравнений (10) несовместна, т. е. не имеет решений. В таком случае у кривой центра нет. Тогда упрощение заданного уравнения следует проводить по другому плану.

П р и м е р. Привести к каноническому виду уравнение

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=0. \tag{12}$$

Р е ш е н и е. Составив уравнения (10)

$$\begin{aligned} 4x_0-2y_0-1&=0,\\ -2x_0+y_0-7&=0, \end{aligned}$$

видим, что полученная система несовместна. Значит, данная кривая не имеет центра и действовать как в n° 114 нельзя.

Поступим иначе. Не меняя начала координат, повернем оси на некоторый угол α. Согласно § 9 получим формулы соответствующего преобразования координат:

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,$$

$$y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha.$$

Перейдем в левой части уравнения (12) к новым координатам:

$$4x^2-4xy+y^2-2x-14y+7=(4\cos^2\alpha-4\cos\alpha\sin\alpha+\sin^2\alpha)\,x'^2+$$
$$+2(-4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha)\,x'y'+$$
$$+(4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)\,y'^2+$$
$$+2(-\cos\alpha-7\sin\alpha)\,x'+2(\sin\alpha-7\cos\alpha)\,y'+7. \qquad (13)$$

Постараемся теперь подобрать угол α так, чтобы коэффициент при $x'y'$ обратился в нуль. Для этого нам придется решить тригонометрическое уравнение

$$-4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+2\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha=0.$$

Имеем

$$2\sin^2\alpha-3\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=0,$$

или

$$2\,\mathrm{tg}^2\,\alpha-3\,\mathrm{tg}\,\alpha-2=0.$$

Отсюда $\mathrm{tg}\,\alpha=2$ или $\mathrm{tg}\,\alpha=-\frac{1}{2}$. Возьмем первое решение, что соответствует повороту осей на острый угол. Зная $\mathrm{tg}\,\alpha$, вычислим $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{1}{\sqrt{5}}, \qquad \sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\,\alpha}}=\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Отсюда и учитывая (13), находим уравнение данной кривой в системе x', y':

$$5y'^2-6\sqrt{5}x'-2\sqrt{5}y'+7=0. \qquad (14)$$

Дальнейшее упрощение уравнения (14) производится при помощи параллельного перенесения осей Ox', Oy'.

Перепишем уравнение (14) следующим образом:

$$5\left(y'^2-2\frac{\sqrt{5}}{5}\;y'\right)-6\sqrt{5}\,x'+7=0.$$

Дополнив выражение в первой скобке до полного квадрата разности и компенсируя это дополнение надлежащим слагаемым, получим:

$$\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-\frac{6\sqrt{5}}{5}\left(x'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)=0.$$

Введем теперь еще новые координаты x'', y'', полагая

$$x'=x''+\frac{\sqrt{5}}{5}, \qquad y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5},$$

что соответствует параллельному перемещению осей на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси Ox' и на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси

Oy'. В координатах x'', y'' уравнение данной линии примет вид:

$$y''^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5} x''.$$

Это есть каноническое уравнение параболы с параметром $p = \frac{3\sqrt{5}}{5}$ и с вершиной в начале координат системы x'', y''. Парабола расположена симметрично относительно оси x'' и бесконечно простирается в положительном направлении этой оси. Координаты вершины в системе x', y' суть $\left(\frac{\sqrt{5}}{5}; \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$, а в системе x, y суть $\left(-\frac{1}{5}; \frac{3}{5}\right)$. Расположение этой параболы показано на рис. 74.

117. Вернемся к системе уравнений (10), определяющих центр данной кривой:

$$\begin{aligned} Ax_0 + By_0 + D &= 0, \\ Bx_0 + Cy_0 + E &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим через δ определитель этой системы:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2.$$

Если $\delta \neq 0$, то система (10) имеет единственное решение (см. Приложение, § 1). В этом случае данная кривая второго порядка имеет единственный центр и называется *центральной*. К числу центральных кривых относятся эллипсы и гиперболы. Но может случиться, что при $\delta \neq 0$ данное уравнение приводится к каноническому виду, который сходен с каноническим уравнением эллипса или с каноническим уравнением гиперболы, однако не совпадает в полной мере ни с тем, ни с другим. Сейчас мы приведем примеры такого рода. Предварительно укажем, что в случае $\delta \neq 0$ общее уравнение второй степени всегда можно упростить, действуя в точности так, как было

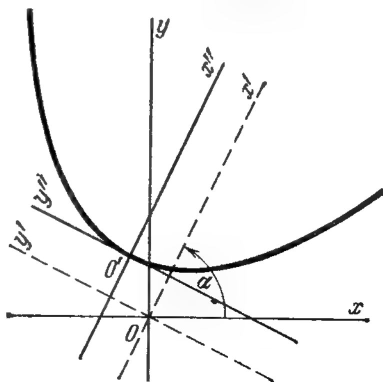


Рис. 74.

показано на примере в n° 114. Поэтому в приводимых далее примерах процесс преобразования не указывается.

Пример 1. Уравнение $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+12=0$ ($\delta=9\neq 0$) приводится к каноническому виду $x'^2+4y'^2+4=0$, или

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=-1.$$

Это уравнение похоже на каноническое уравнение эллипса. Однако оно не определяет на плоскости никакого действительного образа, так как для любых действительных чисел x', y' левая часть его неотрицательна, а справа стоит -1. Такое уравнение и аналогичные ему называются уравнениями *мнимого эллипса*.

Пример 2. Уравнение $5x^2+6xy+5y^2-4x+4y+4=0$ ($\delta=9\neq 0$) приводится к каноническому виду $x'^2+4y'^2=0$, или

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) также похоже на каноническое уравнение эллипса, но определяет не эллипс, а единственную точку: $x'=0$, $y'=0$. Такое

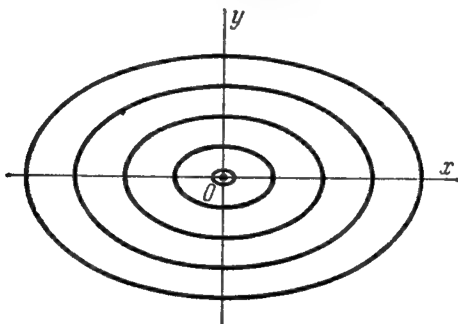


Рис. 75.

уравнение и аналогичные ему называются уравнениями *вырожденного эллипса*. Чтобы объяснить это название, рассмотрим уравнение

$$\frac{x'^2}{4}+\frac{y'^2}{1}=\varepsilon^2, \qquad (**)$$

где ε — какое-нибудь число ($\varepsilon>0$). Уравнение (**) определяет обыкновенный эллипс с полуосями $a=2\varepsilon$, $b=\varepsilon$. Представим себе, что ε стремится к нулю. Тогда $a\to 0$, $b\to 0$ и эллипс «вырождается» в точку (рис. 75). Вместе с тем и уравнение (**) превращается в уравнение (*).

Пример 3. Уравнение $3x^2+10xy+3y^2+16x+16y+16=0$ ($\delta=-16\neq 0$) приводится каноническому виду $x'^2-4y'^2=0$, или

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=0. \qquad (*)$$

Уравнение (*) похоже на каноническое уравнение гиперболы; оно определяет пару пересекающихся прямых: $x'-2y'=0$, $x'+2y'=0$. Такое уравнение и аналогичные ему называются уравнениями *вырожденной гиперболы*.

Чтобы объяснить это название, положим

$$\frac{x'^2}{4}-\frac{y'^2}{1}=\varepsilon^2, \qquad (**)$$

где ε — какое-нибудь число ($\varepsilon>0$). Уравнение (**) определяет обыкновенную гиперболу с полуосями $a=2\varepsilon$, $b=\varepsilon$ и с вершинами на оси абсцисс. Представим себе, что ε стремится к нулю. Тогда $a\to 0$,

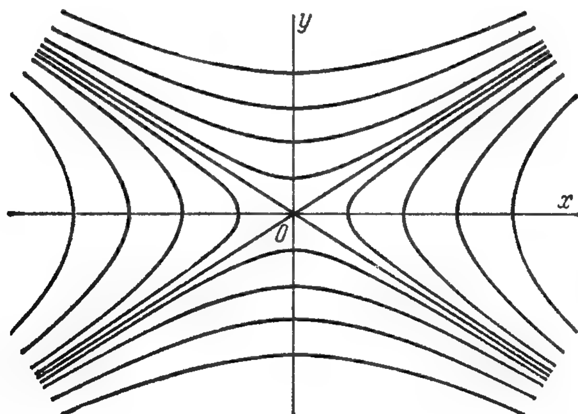


Рис. 76.

$b\to 0$, вершины гиперболы сближаются и гипербола «вырождается» в пару прямых, именно в пару своих асимптот. Вместе с тем и уравнение (**) превращается в уравнение (*). Если в уравнении (**) ε^2 заменить на $-\varepsilon^2$, то получим гиперболу с вершинами на оси ординат. Эта гипербола при $\varepsilon\to 0$ вырождается в ту же самую пару прямых (рис. 76).

Предположим теперь, что для данного общего уравнения второй степени имеем $\delta=0$. При условии $\delta=0$ возможны два случая:

1) Система уравнений (10) совсем не имеет решений; тогда кривая второго порядка не имеет центра. В этом случае данное уравнение всегда можно привести к каноническому виду так, как показано на примере в n° 116, причем в результате всегда будет получаться каноническое уравнение параболы.

2) Система уравнений (10) имеет бесконечно много решений, тогда данная линия второго порядка имеет бесконечно много центров.

Пример 4. Рассмотрим линию второго порядка

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=0; \qquad (*)$$

для нее $\delta=0$. Система (10) в данном случае будет

$$4x_0-2y_0+2=0,$$
$$-2x_0+y_0-1=0.$$

Эта система равносильна одному уравнению $2x_0-y_0+1=0$, следовательно, линия имеет бесконечно много центров, составляющих прямую $2x-y+1=0$. Заметим, что левая часть данного уравнения разлагается на множители первой степени:

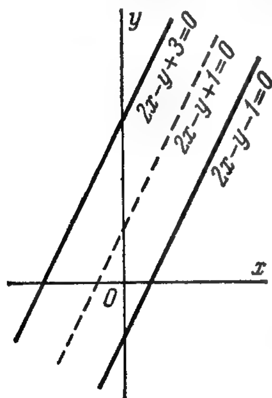


Рис. 77.

$$4x^2-4xy+y^2+4x-2y-3=$$
$$=(2x-y+3)(2x-y-1).$$

Значит, рассматриваемая линия есть пара параллельных прямых:

$$2x-y+3=0$$

и

$$2x-y-1=0.$$

Прямая $2x-y+1=0$, составленная из центров, представляет собой не что иное, как среднюю линию этой пары прямых (рис. 77).

Чтобы упростить данное уравнение *), можно действовать как в n° 116. Произведя преобразование левой части уравнения аналогично тому, как сделано в равенстве (13), и повторяя дальнейшие соображения и выкладки, найдем $\operatorname{tg}\alpha=2$. Повернув оси на угол α ($\operatorname{tg}\alpha=2$), приведем данное уравнение к виду

$$5y'^2-2\sqrt{5}\,y'-3=0;$$

отсюда

$$5\left(y'-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2-4=0.$$

Полагая $x'=x''$, $y'=y''+\frac{\sqrt{5}}{5}$, что соответствует параллельному перемещению осей Ox', Oy' на величину $\frac{\sqrt{5}}{5}$ в направлении оси Oy', получим, наконец:

$$5y''^2-4=0.$$

Мы снова видим, что заданное уравнение определяет пару параллельных прямых ($\sqrt{5}\,y''-2=0$ и $\sqrt{5}\,y''+2=0$ в последней координатной системе).

В том случае, когда уравнение второй степени определяет линию второго порядка с бесконечным множеством центров (как в последнем примере), принято говорить, что оно является уравнением *вырожденной параболы.*

118. Рассмотренные примеры убедительно показывают, что общее уравнение кривой второго порядка всегда можно привести к каноническому виду. Точное доказательство этого утверждения см., например, в нашей книге «Квадратичные формы и матрицы».

§ 42. Гипербола как график обратной пропорциональности. Парабола как график квадратного трехчлена

119. В математике и ее приложениях часто встречается уравнение вида $xy=m$, или $y=\frac{m}{x}$ ($m=\text{const}\neq 0$); оно называется *уравнением обратной пропорциональности величин x и y*. Нетрудно показать, что в декартовых прямоугольных координатах x, y *такое уравнение определяет равностороннюю гиперболу, асимптотами которой служат оси координат*.

В самом деле, повернем оси Ox и Oy на угол $\alpha=45°$. Тогда координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам:

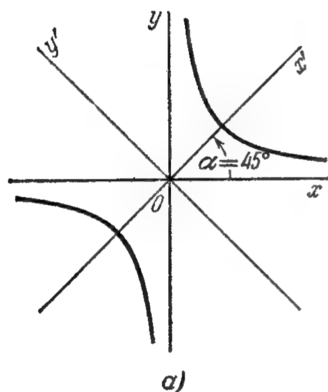
$$\left.\begin{aligned} x&=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha=\frac{x'-y'}{\sqrt{2}},\\ y&=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Преобразуя уравнение $xy=m$ по формулам (1), получаем

в новых координатах

$$\frac{x'^2}{2m}-\frac{y'^2}{2m}=1.$$

Мы видим, что это есть каноническое уравнение равносторонней гиперболы с полуосями $a=b=\sqrt{2|m|}$; асимптоты ее наклонены под углом 45° к новым координатным осям, следовательно, совпадают со старыми осями; если число m



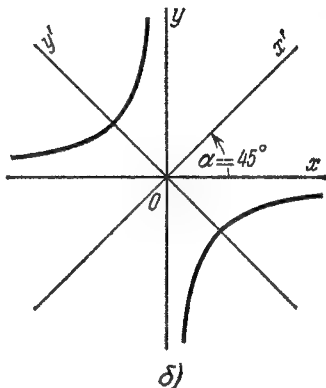


Рис. 78.

положительно, то рассматриваемая гипербола пересекает новую ось абсцисс, если m отрицательно, она пересекает новую ось ординат. Отсюда заключаем, что, как мы и утверждали, уравнение $xy=m$ определяет равностороннюю гиперболу, асимптоты которой совпадают с координатными осями; гипербола расположена в первой и третьей координатных четвертях, если $m>0$ (рис. 78, *а*), во второй и четвертой четвертях, если $m<0$ (рис. 78, *б*).

На основании изложенного мы можем также сказать, что *равносторонняя гипербола есть график обратной пропорциональности.*

120. Уравнение

$$y=ax^2+bx+c \quad (a\neq 0) \tag{2}$$

определяет параболу, ось симметрии которой перпендикулярна к оси абсцисс; эта парабола будет восходящей, если $a>0$, *нисходящей, если* $a<0$.

Чтобы доказать сказанное, достаточно привести уравнение (2) к каноническому виду. С этой целью переделаем его запись следующим образом:

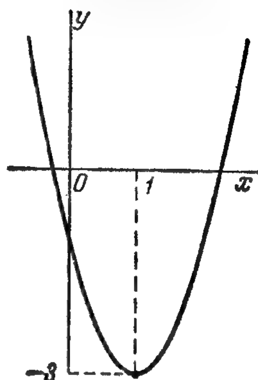


Рис. 79.

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c,$$

или

$$y = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}, \quad (3)$$

или

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

Перенесем теперь начало координат в точку $\left(-\frac{b}{2a};\ \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Тогда координаты всех точек плоскости преобразуются по формулам

$$x = \tilde{x} - \frac{b}{2a},$$
$$y = \tilde{y} + \frac{4ac - b^2}{4a},$$

а уравнение (3) в новых координатах примет вид

$$\tilde{y} = a\tilde{x}^2,$$

или

$$\tilde{x}^2 = \pm 2p\tilde{y}, \quad (4)$$

где p есть положительное число, определяемое равенством $\pm p = \frac{1}{2a}$.

Мы получили каноническое уравнение параболы с вершиной в новом начале координат и расположенной симметрично относительно новой оси ординат. Эта парабола является восходящей или нисходящей в зависимости от того, будет ли число $a = \frac{1}{\pm 2p}$ положительно или отрицательно. Так как новая ось ординат перпендикулярна к старой оси абсцисс,

то рассматриваемая парабола расположена именно так, как мы указали. Тем самым наше утверждение доказано.

121. Выражение ax^2+bx+c называется *квадратным трехчленом* от аргумента x. Соответственно этому мы можем сказать, что *парабола* (с вертикальной осью) *есть график квадратного трехчлена.*

Пример. Уравнение $y=2x^2-4x-1$ определяет восходящую параболу, так как $a=2>0$. Чтобы определить ее вершину, перепишем данное уравнение так: $y+3=2(x-1)^2$. Для приведения этого уравнения к каноническому виду нужно перенести начало координат в точку $(1; -3)$. Эта точка есть вершина рассматриваемой параболы (рис. 79).

ЧАСТЬ ВТОРАЯ
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА 7
НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЕЙШИЕ ЗАДАЧИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 43. Декартовы прямоугольные координаты в пространстве

122. Если указан способ, позволяющий устанавливать положение точек пространства заданием чисел, то говорят, что в пространстве введена система координат. Мы рассмотрим сейчас простейшую и наиболее употребительную систему координат, которая называется декартовой прямоугольной.

Декартова прямоугольная система координат в пространстве определяется заданием линейной единицы для измерения длин и трех пересекающихся в одной точке взаимно перпендикулярных осей, занумерованных в каком-нибудь порядке (т. е. указано, какая из них считается первой, какая второй и какая третьей).

Точка пересечения осей называется *началом координат*, а сами оси — *координатными осями*, причем первую из них называют также *осью абсцисс*, вторую — *осью ординат*, третью — *осью аппликат*.

Обозначим начало координат буквой O, ось абсцисс — буквами Ox, ось ординат — буквами Oy и ось аппликат — буквами Oz. На чертежах буквы x, y, z ставятся около соответственных осей в положительном направлении от точки O в том месте, где изображения осей обрываются; таким образом, само расположение букв указывает, куда направлена каждая ось.

Пусть M — произвольная точка пространства; спроектируем точку M на координатные оси, т. е. опустим из M

перпендикуляры на прямые Ox, Oy и Oz. Основания этих перпендикуляров обозначим соответственно M_x M_y и M_z.

Координатами точки M в заданной системе называются числа

$$x = OM_x, \quad y = OM_y, \quad z = OM_z,$$

где OM_x *означает величину отрезка* $\overline{OM_x}$ *оси абсцисс*, OM_y — *величину отрезка* $\overline{OM_y}$ *оси ординат*, OM_z — *величину отрезка* $\overline{OM_z}$ *оси аппликат* (что такое величина отрезка оси, изложено в n° 2). *Число x называется первой координатой или абсциссой точки M, число y называется второй координатой или ординатой точки M, число z называется третьей координатой или аппликатой точки M.* В тексте координаты записываются в круглых скобках рядом с той буквой, которой помечена сама точка: $M(x; y; z)$.

Проекцию точки M на ось Ox можно получить также, если опустить из M перпендикуляр на плоскость Oxy, а затем из его основания, которое мы обозначим M_{xy}, опустить перпендикуляр на ось Ox; этот последний перпендикуляр и будет иметь своим основанием M_x; иначе говоря, M_x есть проекция на ось Ox точки M_{xy}. Проекция точки M_{xy} на ось Oy есть, очевидно, точка M_y.

Аналогично, если M_{xz} и M_{yz} — основания перпендикуляров, опущенных из M соответственно на плоскости Oxz и Oyz, то, проектируя M_{xz} и M_{yz} на координатные оси, мы получим точки M_x, M_y и M_z (каждая из точек M_x, M_y, M_z получается при этом двояким способом; например, точка M_x есть проекция на ось Ox как точки M_{xy}, так и точки M_{xz}).

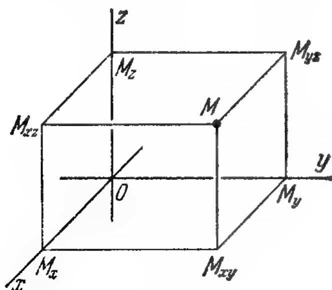


Рис. 80.

Точки M_x, M_y, M_z, M_{xy}, M_{xz}, M_{yz} и O являются вершинами прямоугольного параллелепипеда, стороны которого, взятые с надлежащими знаками, суть координаты точки M. Этот параллелепипед изображен на рис. 80.

123. Если задана система декартовых прямоугольных координат, то каждая точка пространства в этой системе имеет

одну вполне определенную тройку координат x, y, z. Обратно, каковы бы ни были три (вещественных) числа x, y, z, в пространстве найдется одна вполне определенная точка, абсцисса которой есть x, ордината есть y и аппликата есть z. Чтобы построить точку по ее координатам x, y, z, нужно на оси абсцисс отложить от начала координат отрезок $\overline{OM_x}$, величина которого равна x, на оси ординат — отрезок $\overline{OM_y}$, величина которого равна y, и на оси аппликат — отрезок $\overline{OM_z}$, величина которого равна z. После этого, проводя через M_x плоскость, перпендикулярную к оси Ox, через M_y — плоскость, перпендикулярную к оси Oy, и через M_z — плоскость, перпендикулярную к оси Oz, мы найдем искомую точку как точку пересечения проведенных плоскостей.

124. Условимся насчет некоторых терминов (считая, что оси даны как на рис. 80).

Плоскость Oyz разделяет все пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси Ox, мы назовем *ближним*, другое — *дальним*.

Точно так же плоскость Oxz разделяет пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси Oy, назовем *правым*, другое — *левым*.

Наконец, и плоскость Oxy разделяет все пространство на два полупространства; то из них, которое расположено в положительном направлении оси Oz, назовем *верхним*, другое — *нижним*.

125. Пусть M — произвольная точка ближнего полупространства; тогда отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox положительное направление и, следовательно, абсцисса $x = OM_x$ точки M положительна. Если же M находится в дальнем полупространстве, то отрезок $\overline{OM_x}$ имеет на оси Ox отрицательное направление и число $x = OM_x$ отрицательно. Наконец, в том случае, когда точка M лежит на плоскости Oyz, ее проекция M_x на ось Ox совпадает с точкой O и $x = OM_x$ есть нуль.

Таким образом, *все точки ближнего полупространства имеют положительные абсциссы* ($x > 0$), *все точки дальнего полупространства имеют отрицательные абсциссы* ($x < 0$); *абсциссы точек, лежащих на плоскости Oyz, равны нулю* ($x = 0$).

Аналогично рассуждая, легко установить, что *все точки правого полупространства имеют положительные ординаты* ($y > 0$), *все точки левого полупространства имеют отрицательные ординаты* ($y < 0$); *ординаты точек, лежащих в плоскости* Oxz, *равны нулю* ($y = 0$).

Наконец, *все точки верхнего полупространства имеют положительные аппликаты* ($z > 0$), *все точки нижнего полупространства имеют отрицательные аппликаты* ($z < 0$); *аппликаты точек, лежащих в плоскости* Oxy, *равны нулю* ($z = 0$).

Принимая во внимание, что точки плоскости Oxz характеризуются равенством $y = 0$, а точки плоскости Oxy — равенством $z = 0$, заключаем, что *точки оси* Ox *характеризуются двумя равенствами*

$$y = 0, \quad z = 0.$$

Аналогично, *точки оси* Oy *характеризуются двумя равенствами*

$$x = 0, \quad z = 0,$$

и *точки оси* Oz *характеризуются двумя равенствами*

$$x = 0, \quad y = 0.$$

Заметим, что начало координат O как точка пересечения осей имеет все три координаты равными нулю: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и этим характеризуется (т. е. все три координаты равны нулю только для точки O).

126. Три плоскости Oxy, Oxz и Oyz вместе разделяют пространство на восемь частей: их называют *координатными октантами* и нумеруют по определенному правилу. Именно, первым октантом называют тот, который лежит одновременно в ближнем, правом и верхнем полупространствах, вторым — лежащий в дальнем, правом и верхнем полупространствах, третьим — лежащий в дальнем, левом и верхнем полупространствах, четвертым — лежащий в ближнем, левом и верхнем полупространствах; пятый, шестой, седьмой и восьмой октанты суть те, которые находятся в нижнем полупространстве соответственно под первым, вторым, третьим и четвертым.

Пусть M — некоторая точка с координатами x, y, z. Из предыдущего следует, что

если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то M лежит в первом октанте,
если $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, то M лежит во втором октанте,
если $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$, то M лежит в третьем октанте,
если $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, то M лежит в четвертом октанте,
если $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$, то M лежит в пятом октанте,
если $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$, то M лежит в шестом октанте,
если $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$, то M лежит в седьмом октанте,
если $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$, то M лежит в восьмом октанте.

Рассмотрение координатных полупространств и октантов полезно тем, что помогает легко ориентироваться в расположении заданных точек по знакам их координат.

§ 44. Понятие свободного вектора. Проекции вектора на ось

127. Из курса элементарной физики читателю известно, что некоторые физические величины, как, например, температура, масса, плотность, называют скалярными. Некоторые другие величины, как, например, сила, перемещение точки, скорость, ускорение, называют векторными.

Каждая скалярная величина может быть охарактеризована одним числом, которое выражает отношение этой величины к соответствующей единице измерения. Напротив, для характеристики векторной величины одного числа недостаточно; это объясняется тем, что векторные величины, кроме размерности, обладают еще и направленностью.

Для отвлеченного выражения конкретных (физических) векторных величин служат геометрические векторы.

Геометрическими векторами, или просто *векторами*, называются направленные отрезки.

Геометрические векторы являются предметом так называемого векторного исчисления подобно тому, как числа являются предметом арифметики. В векторном исчислении над векторами производятся некоторые операции; они суть математические абстракции некоторых единообразных операций, производимых с различными конкретными векторными величинами в физике.

Возникшее для удовлетворения потребностей физики векторное исчисление оказалось плодотворным и внутри самой математики. В этой книге векторы используются как один из удобных инструментов аналитической геометрии.

Начальным сведениям из векторного исчисления посвящена следующая глава. В ближайших пунктах сообщаются только простейшие, чисто геометрические предложения о направленных отрезках в пространстве.

Однако представляется целесообразным уже здесь ввести некоторые понятия, обозначения и термины, принятые в векторном исчислении.

128. Вектор, как направленный отрезок, мы будем по-прежнему записывать в тексте двумя большими латинскими буквами с общей чертой наверху, при условии, что первая буква обозначает начало, вторая — конец вектора. Но, кроме того, мы очень часто будем употреблять запись вектора одной малой латинской буквой жирного шрифта (например, $\mathbf{a}$). На чертеже вектор всегда будем изображать в виде стрелки; если вектор обозначен одной буквой, то на чертеже эту букву мы будем ставить около конца стрелки. Начало вектора мы часто будем называть также его *точкой*

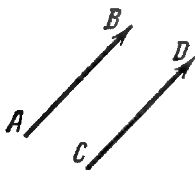


Рис. 81.

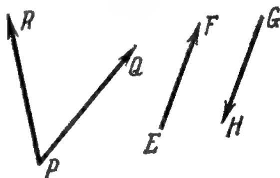


Рис. 82.

приложения. Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нулевым*. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются *коллинеарными*.

129. Определение равенства векторов. *Векторы называются равными, если они коллинеарны, имеют одинаковые длины и одинаковые направления.*

На рис. 81 изображены равные векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ ($\overline{AB} = \overline{CD}$) *), на рис. 82 — неравные векторы $\overline{PQ}$ и $\overline{PR}$ ($\overline{PQ} \neq \overline{PR}$), $\overline{EF}$ и $\overline{GH}$ ($\overline{EF} \neq \overline{GH}$).

---

*) Мы предполагаем, что эти векторы лежат в плоскости чертежа.

Очевидно, *два вектора, порознь равные третьему, равны между собой.*

Из определения равенства векторов следует, что каковы бы ни были вектор $\boldsymbol{a}$ и точка P, существует, и притом только один, вектор $\overline{PQ}$ с началом в P, равный вектору $\boldsymbol{a}$; иначе говоря, для каждого вектора точка приложения может быть выбрана где угодно. Соответственно этому в геометрии векторы рассматривают с точностью до их положения (т. е. не различая равных векторов, получающихся друг из друга параллельным переносом). В этом смысле векторы называют *свободными.*

130. *Длина вектора* (при заданном масштабе) *называется его модулем.* Модуль нулевого вектора равен нулю. Для модуля вектора $\boldsymbol{a}$ пользуются обозначением $|\boldsymbol{a}|$ или a. Очевидно, если $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$, то $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|$; обратное заключение, конечно, недопустимо.

131. Пусть даны произвольная ось u и некоторый вектор $\overline{AB}$.

Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось u и обозначим их основания соответственно через A' и B'. *Число $A'B'$, т. е. величина направленного отрезка $\overline{A'B'}$ оси u, есть проекция вектора AB на ось u*:

$$\text{пр}_u \overline{AB} = A'B'.$$

Построение проекции вектора $\overline{AB}$ на ось u показано на рис. 83, где для наглядности через точки A и B проведены плоскости α и β, перпендикулярные к оси u. Пересечением этих плоскостей с осью u определяются точки A' и B' (так как плоскости α и β перпендикулярны к оси u, то и прямые AA' и BB' перпендикулярны к этой оси).

132. Возьмем в пространстве произвольную точку S и проведем через нее два луча: один в направлении вектора $\overline{AB}$, другой — в направлении оси u (рис. 83). Угол φ, составленный этими лучами, называется *углом наклона* вектора $\overline{AB}$ к оси u. Очевидно, выбор точки S для построения угла φ безразличен. Очевидно также, что если мы заменим ось u другой осью, имеющей то же направление, то угол φ останется прежним. Обозначим через v ось, которая направлена так же, как ось u, и проходит через точку A. Согласно сказанному, угол наклона вектора AB к оси v

равен φ. Пусть C — точка, в которой ось v пересекает плоскость β. Так как ось v параллельна оси u, а эта последняя перпендикулярна к плоскости β, то и ось v перпендикулярна к плоскости β. Следовательно, AC есть проекция вектора $\overline{AB}$ на ось v. Далее, поскольку оси u и v

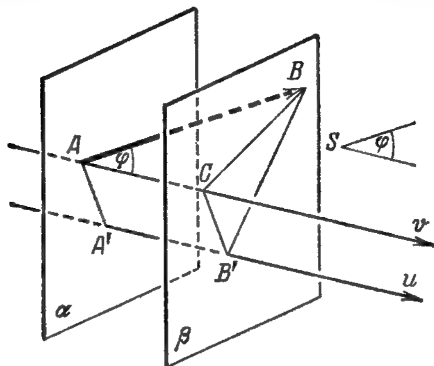


Рис. 83.

параллельны и одинаково направлены, их отрезки, заключенные между параллельными плоскостями α и β, имеют одинаковые величины: $A'B' = AC$. Отсюда

$$\text{пр}_u \overline{AB} = \text{пр}_v \overline{AB}. \tag{1}$$

С другой стороны, так как вектор $\overline{AB}$ и ось v расположены в одной плоскости, мы вправе применить к ним формулу (7) n° 20; таким образом,

$$\text{пр}_v \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \tag{2}$$

Сопоставляя равенства (1) и (2), находим:

$$\text{пр}_u \overline{AB} = |\overline{AB}| \cos\varphi. \tag{3}$$

Если, ради краткости, обозначить вектор $\overline{AB}$ одной буквой $\boldsymbol{a}$, то формула (3) примет вид:

$$\text{пр}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi. \tag{4}$$

Итак, *проекция вектора на ось равна его модулю, умноженному на косинус угла наклона вектора к этой оси.*

133. Рассмотрим два равных вектора $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_2B_2}$ и какую-нибудь ось u. Так как равные векторы имеют одинаковые модули и одинаковые углы наклона к оси u, то, применяя к каждому из них формулу (3), мы получим одинаковые результаты:

$$\text{пр}_u\overline{A_1B_1} = \text{пр}_u\overline{A_2B_2}.$$

Таким образом, *равные векторы имеют равные проекции на одну и ту же ось.*

§ 45. Проекции вектора на оси координат

134. Мы предполагаем, что в пространстве задана некоторая система декартовых прямоугольных координат.

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{a}$. Пусть X обозначает проекцию вектора $\boldsymbol{a}$ на ось Ox, Y — проекцию этого вектора на ось Oy и Z — проекцию его на ось Oz.

Согласно n° 133 каждый вектор, равный $\boldsymbol{a}$, имеет в качестве проекций на оси координат те же числа X, Y, Z.

Обратно, если некоторый вектор $\boldsymbol{b}$ имеет проекции на оси координат такие же, что и вектор $\boldsymbol{a}$, то $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$. Чтобы убедиться в этом, приложим оба вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к началу координат; концы этих векторов при таком их расположении обозначим соответственно буквами A и B. Так как векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ имеют одну и ту же проекцию X на ось Ox, то ясно, что точки A и B должны лежать на одной плоскости, перпендикулярной к оси Ox, именно, на плоскости, которая отсекает на оси Ox отрезок величины X (считая от начала координат). По аналогичной причине точки A и B должны лежать на одной плоскости, перпендикулярной к оси Oy, именно на той, которая отсекает на оси Oy отрезок величины Y, а также на одной плоскости, перпендикулярной к оси Oz, именно на той, которая отсекает на оси Oz отрезок величины Z. Но в таком случае точки A и B необходимо совпадают, поскольку три указанные плоскости пересекаются в единственной точке. Следовательно,

$$\boldsymbol{b} = \overline{OB} = \overline{OA} = \boldsymbol{a}.$$

Сказанное сейчас означает, что *проекции вектора на оси координат, будучи заданы, вполне определяют его как*

свободный вектор, т. е. с точностью до положения в пространстве. Поэтому проекции X, Y, Z вектора $\boldsymbol{a}$ называют его (декартовыми) *координатами*.

В дальнейшем, желая выразить, что вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты X, Y, Z, мы будем писать:

$$\boldsymbol{a} = \{X;\ Y;\ Z\},$$

рассматривая правую часть этого равенства как новый символ для обозначения вектора.

135. В аналитической геометрии часто приходится вычислять координаты вектора, т. е. проекции вектора на координатные оси, зная координаты его конца и начала. Эта задача решается следующей теоремой:

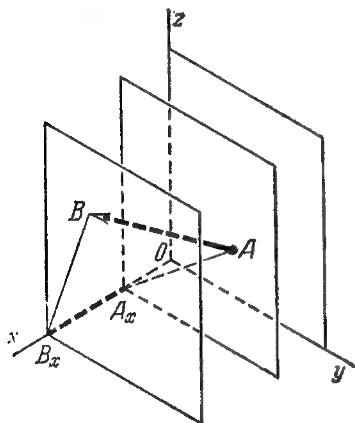


Рис. 84.

Теорема 15. *Каковы бы ни были две точки $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, координаты вектора $\overline{AB}$ определяются формулами*

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1. \qquad (1)$$

Доказательство. Опустим из точек A и B перпендикуляры на ось Ox и обозначим их основания через A_x, B_x (см. рис. 84, где для наглядности через точки A и B проведены плоскости, перпендикулярные к оси Ox). Точки A_x и B_x имеют на оси Ox соответственно координаты x_1, x_2. Отсюда в силу теоремы 1 (n° 5)

$$A_xB_x = x_2 - x_1.$$

Но $A_xB_x = X$, следовательно, $X = x_2 - x_1$. Аналогично устанавливаются равенства: $Y = y_2 - y_1$ и $Z = z_2 - z_1$.

Таким образом, *чтобы получить координаты вектора, нужно от координат его конца отнять соответствующие координаты начала.*

136. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка пространства. Вектор $\boldsymbol{r}=\overline{OM}$, т. е. *вектор, идущий из начала координат в точку* M, *называется радиус-вектором этой точки.*

Вычисляя координаты вектора $\overline{OM}$ по формулам (1), именно, полагая в указанных формулах $x_2=x$, $y_2=y$, $z_2=z$, $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=0$, мы получим:

$$X=x,\ Y=y,\ Z=z,$$

т. е. *координаты точки* M *и координаты ее радиус-вектора* $\overline{OM}$ *суть одни и те же числа.* Заметим, однако, что последнее утверждение помимо формул (1) сразу вытекает из определения декартовых координат точки M (см. n° 122).

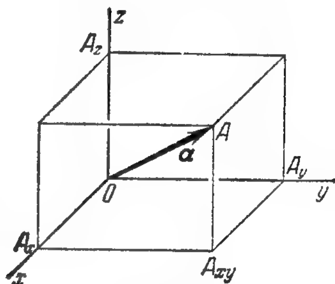


Рис. 85.

137. Пусть дан произвольный вектор $\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$. Мы установим сейчас формулу, которая позволит вычислять модуль вектора $\boldsymbol{a}$, зная координаты X, Y, Z этого вектора. Будем считать для простоты, что вектор $\boldsymbol{a}$ приложен к началу координат. Проведем через конец A вектора $\boldsymbol{a}$ плоскости, перпендикулярные к координатным осям; точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно A_x, A_y, A_z. Проведенные плоскости вместе с координатными плоскостями образуют прямоугольный параллелепипед, диагональю которого служит отрезок OA (рис. 85). Как известно из элементарной геометрии, квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов длин трех его смежных сторон. Следовательно,

$$OA^2=OA_x^2+OA_y^2+OA_z^2.$$

Но $OA=|\boldsymbol{a}|$, $OA_x=X$, $OA_y=Y$, $OA_z=Z$; таким образом, из предыдущего равенства получаем:

$$|\boldsymbol{a}|^2=X^2+Y^2+Z^2,$$

или

$$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \qquad (2)$$

Это и есть искомое выражение модуля произвольного вектора через его координаты.

§ 46. Направляющие косинусы

138. Обозначим через α, β, γ углы, которые составляет вектор $\boldsymbol{a}$ с осями координат; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *направляющими косинусами вектора* $\boldsymbol{a}$. Они называются направляющими косинусами вектора потому, что, будучи заданы, определяют его направление.

Если заданы не только направляющие косинусы, но и модуль вектора, то тем самым вектор определен вполне (как свободный вектор). В этом случае *координаты вектора могут быть вычислены по формулам:*

$$\left.\begin{aligned} X &= |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \\ Y &= |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \\ Z &= |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

которые имеют место согласно n° 132.

139. Изложенное в предыдущих двух пунктах мы резюмируем в виде следующей теоремы:

Теорема 16. *Каким бы ни был вектор* $\boldsymbol{a}$, *его модуль* $|\boldsymbol{a}|$, *направляющие косинусы* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *и координаты* X, Y, Z *связаны соотношениями:*

$$X = |\boldsymbol{a}|\cos\alpha, \quad Y = |\boldsymbol{a}|\cos\beta, \quad Z = |\boldsymbol{a}|\cos\gamma, \tag{1}$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{X^2+Y^2+Z^2}. \tag{2}$$

Замечание. *Последние четыре формулы позволяют вычислить направляющие косинусы вектора, зная координаты этого вектора.* В самом деле, из этих формул следует, что

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}, \\ \cos\gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Здесь корни понимаются арифметически (как всегда, когда перед корнем не указаны знаки).

140. Возводя в квадрат левую и правую части каждого из равенств (3) и суммируя полученные результаты, найдем:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{X^2+Y^2+Z^2}{X^2+Y^2+Z^2};$$

отсюда

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1. \tag{4}$$

При помощи соотношения (4) *можно вычислить любой из углов* α, β, γ, *зная два других и, кроме того, зная, является ли искомый угол острым или тупым.*

§ 47. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении

141. В аналитической геометрии пространства, как и в аналитической геометрии плоскости, каждая задача, какой бы сложной она ни была, сводится к некоторым простейшим задачам. Таковыми являются: задача определения расстояния между двумя данными точками, задача о делении отрезка в данном отношении, задача вычисления угла между двумя векторами и т. п. В этом параграфе мы рассмотрим первые две из перечисленных задач.

142. Пусть даны две произвольные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и требуется вычислить расстояние d между ними.

Искомый результат получается сразу при помощи теоремы 15 (n° 135) и формулы (2) предыдущего параграфа.

В самом деле, мы имеем:

$$\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1\};$$

далее, d есть модуль вектора $\overline{M_1M_2}$, следовательно,

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \tag{1}$$

Эта формула и дает решение задачи.

143. Пусть даны две произвольные точки $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и требуется на прямой M_1M_2 найти точку M, делящую отрезок $\overline{M_1M_2}$ в заданном отношении λ.

Эта задача решается аналогично тому, как соответствующая задача в аналитической геометрии плоскости

(см. n° 24). Поэтому мы сразу приведем готовый результат: *если x, y, z — координаты искомой точки M, то*

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z=\frac{z_1+\lambda z_2}{1+\lambda}.$$

В частности, *координаты середины данного отрезка получаются отсюда при* $\lambda=1$:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2}, \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}, \quad z=\frac{z_1+z_2}{2}.$$

144. Для решения других простейших задач пространственной аналитической геометрии удобно применять некоторые особые операции над векторами, которые называются сложением векторов, умножением вектора на число, скалярным умножением векторов и векторным умножением векторов. Определение и основные свойства этих операций будут изложены в ближайших трех главах.

ГЛАВА 8

ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

§ 48. Определение линейных операций

145. Линейными операциями над векторами называются операции сложения векторов и умножения векторов на числа.

Определение суммы двух векторов. *Пусть даны два вектора* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$. *Суммой* $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ *называется вектор, который идет из начала вектора* $\boldsymbol{a}$ *в конец вектора* $\boldsymbol{b}$, *при условии, что вектор* $\boldsymbol{b}$ *приложен к концу вектора* $\boldsymbol{a}$.

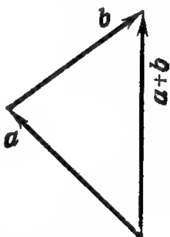


Рис. 86.

Построение суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ изображено на рис. 86. Правило сложения векторов, которое содержится в этом определении, обычно называют «правилом треугольника».

Замечание. Может случиться, что при построении суммы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ по правилу треугольника конец вектора $\boldsymbol{b}$ окажется совпавшим с началом вектора $\boldsymbol{a}$; тогда $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ есть нулевой вектор: $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=0$.

Определение произведения вектора на число. *Пусть даны вектор* $\boldsymbol{a}$ *и число* α. *Обозначим их модули соответственно через* $|\boldsymbol{a}|$ *и* $|\alpha|$. *Произведением* $\alpha\boldsymbol{a}$ *(или* $\boldsymbol{a}\alpha$*) называется вектор, который коллинеарен вектору* $\boldsymbol{a}$, *имеет длину, равную* $|\boldsymbol{a}|\cdot|\alpha|$, *и направление такое же, как у вектора* $\boldsymbol{a}$, *если* $\alpha>0$, *и противоположное, если* $\alpha<0$.

Операция построения вектора $\alpha\boldsymbol{a}$ называется *умножением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* α.

Замечание 1. Если $\boldsymbol{a}=0$ или $\alpha=0$, то произведение имеет модуль, равный нулю, и, следовательно, представляет собой нулевой вектор. В этом случае направление произведения $\alpha\boldsymbol{a}$ является неопределенным.

Замечание 2. Смысл операции умножения вектора на число можно выразить наглядно следующим образом: *при умножении вектора* $\boldsymbol{a}$ *на число* α *вектор* $\boldsymbol{a}$ *«растягивается» в* α *«раз»*. Конечно, это выражение условно; например, если $\alpha=\frac{1}{2}$, то «растяжение» в α «раз» по существу означает уменьшение длины $\boldsymbol{a}$ в два раза; если α — число отрицательное, то «растяжение» в α «раз» следует понимать как такое изменение вектора, при котором этот вектор удлиняется в $|\alpha|$ раз («модуль α раз») и меняет свое направление на противоположное.

§ 49. Основные свойства линейных операций

146. Мы установим сейчас основные свойства линейных операций, которыми приходится пользоваться в векторном исчислении.

Прежде всего мы покажем, что *сумма любых двух векторов не зависит от порядка слагаемых.*

С этой целью рассмотрим два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как геометрические векторы суть свободные векторы, то мы можем $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приложить к одной точке O, выбрав ее произвольно. Обозначим концы векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ при таком их расположении буквами A и B (рис. 87). Приложим теперь вектор $\boldsymbol{b}$ к точке A, обозначим конец его (при новом расположении) буквой C и соединим точку B с точкой C отрезком. Очевидно, вектор $\overline{BC}$ имеет такую же длину и так же направлен, как вектор $\overline{OA}$; следовательно, $\overline{BC}=\boldsymbol{a}$.

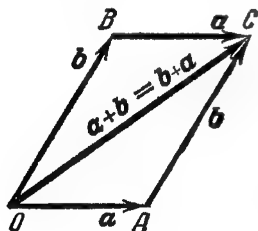


Рис. 87.

Рассматривая фигуру OAC и вспоминая правило сложения векторов («правило треугольника»), найдем, что $\overline{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. С другой стороны, рассматривая фигуру OBC, согласно тому же правилу найдем, что $\overline{OC}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$. Отсюда

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, \tag{1}$$

и утверждение доказано.

Свойство векторного сложения, выраженное тождеством (1), называется *переместительным.*

Замечание. Фигуру $OABC$ называют *параллелограммом, построенным на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ с общим началом O, вектор $\overline{OC}$ — его диагональю (так говорят даже и в том случае, когда $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ и $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$ лежат на одной прямой, т. е. когда $OABC$ не является параллелограммом в собственном смысле слова). На основании изложенного правило сложения векторов можно высказать в новой формулировке:

Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приведены к общему началу и на них построен параллелограмм, то сумма $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ (или $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$) есть диагональ этого параллелограмма, идущая из общего начала $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Высказанное в таком виде правило сложения векторов называется «правилом параллелограмма».

147. После того, как определена сумма двух векторов, естественным образом можно определить сумму любого числа векторных слагаемых.

Пусть, например, нам даны три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Сложив $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, мы получим вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. Прибавим теперь к нему вектор $\boldsymbol{c}$; у нас получится вектор $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$. Наряду с этим мы можем построить также вектор $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$, т. е. к вектору $\boldsymbol{a}$ прибавить сумму $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

Нетрудно убедиться в том, что, *каковы бы ни были три вектора* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, *всегда имеет место равенство*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}). \qquad (2)$$

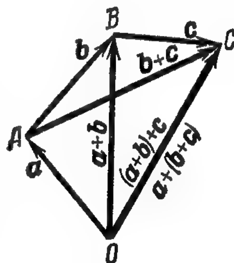


Рис. 88.

Свойство векторного сложения, выраженное тождеством (2), называется *сочетательным*.

Чтобы доказать сочетательное свойство, расположим рассматриваемые векторы так, чтобы вектор $\boldsymbol{b}$ был приложен к концу вектора $\boldsymbol{a}$, а вектор $\boldsymbol{c}$ — к концу вектора $\boldsymbol{b}$. При этом их расположении обозначим буквой O начало вектора $\boldsymbol{a}$, буквой A — его конец, буквой B — конец вектора $\boldsymbol{b}$ и буквой C — конец вектора $\boldsymbol{c}$ (рис. 88). Тогда

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=(\overline{OA}+\overline{AB})+\overline{BC}=\overline{OB}+\overline{BC}=\overline{OC},$$

$$\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\overline{OA}+(\overline{AB}+\overline{BC})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC}.$$

Следовательно,

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),$$

что и требовалось доказать.

На основании сочетательного свойства сложения векторов мы имеем право говорить о сумме трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и записывать ее в виде $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$, не указывая при этом, считаем ли мы $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$. Аналогичным образом может быть определена сумма четырех, пяти, вообще, любого числа векторных слагаемых.

Практически построение суммы нескольких векторов нет надобности выполнять последовательно, фиксируя каждый промежуточный результат; сумма любого числа векторов может быть построена сразу при помощи следующего правила.

Общее правило сложения векторов. *Чтобы построить сумму векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, нужно к концу вектора $\boldsymbol{a}_1$ приложить вектор $\boldsymbol{a}_2$, затем к концу вектора $\boldsymbol{a}_2$ приложить вектор $\boldsymbol{a}_3$, затем к концу вектора $\boldsymbol{a}_3$ приложить вектор $\boldsymbol{a}_4$ и т. д., пока не дойдем до вектора $\boldsymbol{a}_n$. Тогда суммой $\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n$ будет вектор, идущий из начала вектора $\boldsymbol{a}_1$ в конец вектора $\boldsymbol{a}_n$.*

Обозначим буквой O начало вектора $\boldsymbol{a}_1$, буквами $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — соответственно концы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, расположенных согласно только что сформулированному правилу.

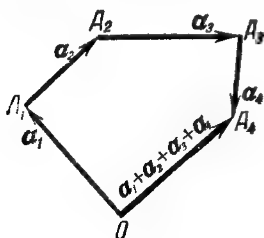


Рис. 89.

Фигура $OA_1A_2\ldots A_n$ называется ломаной с векторными звеньями $\overline{OA_1}=\boldsymbol{a}_1$, $\overline{A_1A_2}=\boldsymbol{a}_2$, $\ldots$, $\overline{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_n$; вектор $\overline{OA_n}$ называется замыкающим ломаную $OA_1A_2\ldots A_n$. Так как

$$\overline{OA_n}=\overline{OA_1}+\overline{A_1A_2}+\overline{A_2A_3}+\ldots$$
$$\ldots+\overline{A_{n-1}A_n}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n,$$

то в соответствии с этим говорят, что *построение суммы нескольких векторов производится при помощи замыкания ломаной* (на рис. 89 изображено построение суммы четырех слагаемых).

Замечание. В n° 146 мы установили, что сумма двух векторов не зависит от порядка слагаемых. Отсюда и из сочетательности сложения векторов следует, что *сумма лю-*

бого числа векторов также не зависит от порядка своих слагаемых.

148. Здесь мы отметим три свойства линейных операций, которые относятся одновременно к сложению векторов и умножению вектора на число. Эти свойства выражаются с помощью следующих трех тождеств, где λ и μ обозначают произвольные числа, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — какие угодно векторы:

$$
\begin{aligned}
&1)\ (\lambda+\mu)\,\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a},\\
&2)\ \lambda(\mu\boldsymbol{a})\quad=(\lambda\mu)\,\boldsymbol{a},\\
&3)\ \lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}.
\end{aligned}
$$

Справедливость первого тождества сделается наглядно ясной, если высказать его в геометрических терминах, именно: при растяжении вектора $\boldsymbol{a}$ в $\lambda+\mu$ раз получается такой же вектор, как при сложении вектора $\boldsymbol{a}$, растянутого в λ раз, с вектором $\boldsymbol{a}$, растянутым в μ раз *).

Столь же прозрачный геометрический смысл имеет и второе тождество: при растяжении вектора $\boldsymbol{a}$ в μ раз и затем еще в λ раз получается такой же вектор, как при растяжении вектора $\boldsymbol{a}$ сразу в $\lambda\mu$ раз.

Третье тождество вытекает из теории подобия фигур. В самом деле, вектор $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (в предположении, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приведены к общему началу); при растяжении векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ в λ раз этот параллелограмм изменяется подобно и, следовательно, превращается снова в параллелограмм.

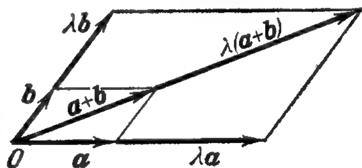


Рис. 90.

Таким образом, $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$ есть диагональ параллелограмма, построенного на векторах $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\lambda\boldsymbol{b}$; отсюда $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$. (См. рис. 90, который соответствует случаю $\lambda>0$; все векторы, изображенные на этом чертеже, считаются приложенными к точке O.)

---

*) «Растяжение» здесь надо понимать так, как указано в замечании 2 n° 145.

Указанные сейчас свойства линейных операций имеют фундаментальное значение, так как они дают право проводить выкладки в векторной алгебре в основном так же, как проводятся выкладки в обычной алгебре. Первое из них выражает возможность «распределять» векторный сомножитель по составляющим числового сомножителя; третье выражает возможность «распределять» числовой сомножитель по составляющим векторного. Поэтому оба эти свойства называются *распределительными*. Совместно они дают право при умножении скалярного многочлена на векторный многочлен производить умножение «*почленно*».

Второе свойство дает возможность «сочетать» числовые сомножители при последовательном умножении вектора на несколько чисел (например, $2(5\boldsymbol{a})=10\boldsymbol{a}$). Поэтому второе свойство называется *сочетательным*.

§ 50. Разность векторов

149. В векторной алгебре вводится действие вычитания векторов; как и в арифметике, оно обратно действию сложения.

Пусть даны два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. *Разностью* $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ *называется вектор, который в сумме с вектором* $\boldsymbol{a}$ *составляет вектор* $\boldsymbol{b}$.

Приведем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к общему началу O, после чего обозначим концы их буквами A и B (рис. 91). Будем искать разность $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$. Допустим, что этот искомый вектор приложен к точке A; тогда конец его должен совпасть с точкой B, так как в сумме с вектором $\boldsymbol{a}=\overline{OA}$ он должен составить вектор $\boldsymbol{b}=\overline{OB}$.

Рис. 91.

Таким образом, разность $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ представляет собой не что иное, как вектор $\overline{AB}$:

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\overline{AB}.$$

Итак, *разность двух векторов, приведенных к общему началу, есть вектор, идущий из конца «вычитаемого» вектора в конец «уменьшаемого»*.

150. Наряду с произвольным вектором $\boldsymbol{a}$ рассмотрим вектор $(-1)\,\boldsymbol{a}$. *Вектор* $(-1)\,\boldsymbol{a}$ *называется обратным вектору* $\boldsymbol{a}$ *и обозначается символом* $-\boldsymbol{a}$:

$$-\boldsymbol{a}=(-1)\,\boldsymbol{a}.$$

Так как при умножении вектора $\boldsymbol{a}$ на -1 получается вектор с тем же модулем, коллинеарный вектору $\boldsymbol{a}$, но направленный противоположно ему (рис. 92), то векторы $\boldsymbol{a}$ и $-\boldsymbol{a}$ называются иногда *равно-противоположными.*

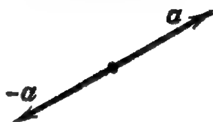


Рис. 92.

Если мы приложим вектор $-\boldsymbol{a}$ к концу вектора $\boldsymbol{a}$, то конец вектора $-\boldsymbol{a}$ совместится с началом вектора $\boldsymbol{a}$; следовательно, $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})$ есть нулевой вектор:

$$\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=0. \qquad (1)$$

151. Рассмотрим снова два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Из тождества (1) тотчас следует, что

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}). \qquad (2)$$

В самом деле,

$$\boldsymbol{a}+[\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{b}+[\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})]=\boldsymbol{b}+0=\boldsymbol{b};$$

таким образом, вектор $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ в сумме с вектором $\boldsymbol{a}$ составляет вектор $\boldsymbol{b}$, а это и значит, что вектор $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ является разностью $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.

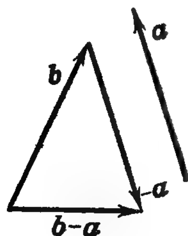


Рис. 93.

Равенство (2) выражает новое правило вычитания: *чтобы получить разность* $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, *нужно к вектору* $\boldsymbol{b}$ *прибавить вектор, обратный вектору* $\boldsymbol{a}$ (рис. 93; из этого чертежа также непосредственно усматривается, что сумма векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a})$ есть вектор $\boldsymbol{b}$). Последнее правило особенно удобно для построения результата прибавления и вычитания нескольких векторов; например, чтобы найти $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}-\boldsymbol{e}$, достаточно взять векторы $\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}, -\boldsymbol{e}$ и построить их сумму, как показано в n° 147.

§ 51. Основные теоремы о проекциях

152. Здесь мы установим две важные теоремы о проекциях векторов.

Теорема 17. *Проекция суммы векторов равна сумме их проекций* (на одну и ту же ось):

$$\text{пр}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n)=\text{пр}_u\boldsymbol{a}_1+\text{пр}_u\boldsymbol{a}_2+\ldots+\text{пр}_u\boldsymbol{a}_n.$$

Доказательство. Составим ломаную с векторными звеньями $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ (см. n° 147), т. е. к концу вектора $\boldsymbol{a}_1$ приложим вектор $\boldsymbol{a}_2$, затем к концу вектора $\boldsymbol{a}_2$ приложим вектор $\boldsymbol{a}_3$ и т. д., наконец, приложим вектор $\boldsymbol{a}_n$

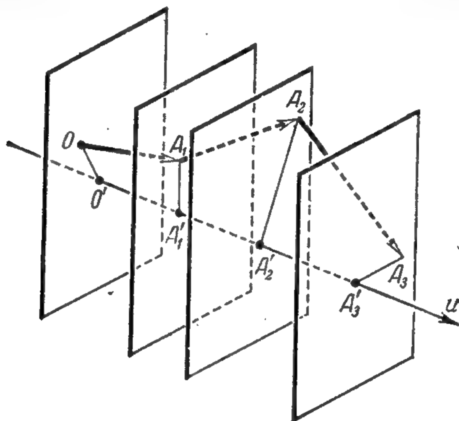


Рис. 94.

к концу вектора $\boldsymbol{a}_{n-1}$. Обозначим (при таком расположении заданных векторов) начало вектора $\boldsymbol{a}_1$ буквой O, конец его — буквой A_1, конец вектора $\boldsymbol{a}_2$ — буквой A_2 и т. д. Тогда

$$\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n=\overline{OA_n}. \quad (1)$$

Спроектируем все точки $O, A_1, A_2, \ldots, A_n$ на ось u и обозначим их проекции соответственно через $O', A_1', A_2', \ldots, A_n'$ (см. рис. 94, который соответствует случаю $n=3$); получаем:

$$O'A_1'=\text{пр}_u\boldsymbol{a}_1, \quad A_1'A_2'=\text{пр}_u\boldsymbol{a}_2, \quad \ldots, \quad A_{n-1}'A_n'=\text{пр}_u\boldsymbol{a}_n. \quad (2)$$

С другой стороны, вследствие равенства (1)

$$\text{пр}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_n)=\text{пр}_u\overline{OA_n}=O'A_n'. \quad (3)$$

Но согласно n° 3 при любом расположении точек O', A'_1, $A'_2, \ldots, A'_n$ на оси u имеет место тождество:

$$O'A'_n = O'A'_1 + A'_1A'_2 + A'_2A'_3 + \ldots + A'_{n-1}A'_n. \qquad (4)$$

Из тождества (4), принимая во внимание формулы (2) и (3), находим, что

$$\text{пр}_u (\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_n) = \text{пр}_u \boldsymbol{a}_1 + \text{пр}_u \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \text{пр}_u \boldsymbol{a}_n.$$

Теорема доказана.

Теорема 18. *При умножении вектора на число его проекция умножается на то же число:*

$$\text{пр}_u \alpha\boldsymbol{a} = \alpha\, \text{пр}_u \boldsymbol{a}.$$

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{a}$ приложен к какой-нибудь точке O оси u; обозначим конец его буквой A. Вектор $\alpha\boldsymbol{a}$ мы будем предполагать также приложенным к точке O и конец его пометим буквой B. Таким образом, $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \alpha\boldsymbol{a}$.

Рассмотрим прямую v, на которой находятся точки O, A, B. Установим на этой прямой (какое угодно) положительное направление; тем самым мы сделаем ее осью.

Спроектируем точки O, A и B на ось u; пусть O', A', B' будут их проекции (рис. 95, *а* и *б*). По известной теореме элементарной геометрии мы имеем пропорцию:

$$\frac{|O'B'|}{|O'A'|} = \frac{|OB|}{|OA|}. \qquad (5)$$

Если отрезки $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ (лежащие на оси v) направлены в одну сторону, то и отрезки $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'A'}$ (на оси u) направлены в одну сторону; если же отрезки $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ направлены в разные стороны, то и отрезки $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'A'}$ направлены в разные стороны (так будет при отрицательном α; этот случай соответствует рис. 95, *б*). Таким образом, отношения величин этих отрезков $\frac{O'B'}{O'A'}$ и $\frac{OB}{OA}$ имеют одинаковые знаки; значит, вместо равенства (5) мы получаем:

$$\frac{O'B'}{O'A'} = \frac{OB}{OA}.$$

Так как $\overline{OB} = \alpha\boldsymbol{a}$ и $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, то $\frac{OB}{OA} = \alpha$. Следовательно,

$\frac{O'B'}{O'A'} = \alpha$, или $O'B' = \alpha \cdot O'A'$. Отсюда

$$\text{пр}_u \alpha \boldsymbol{a} = \alpha\, \text{пр}_u \boldsymbol{a}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Последнюю теорему наглядно можно высказать так: *при растяжении вектора в α раз его проекция растягивается тоже в α раз.*

153. В n° 134 был установлен принцип определения каждого свободного вектора в пространстве заданием трех

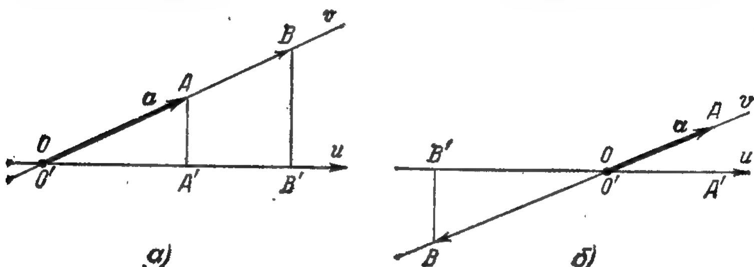


Рис. 95.

чисел — его координат. Нам существенно знать, *какие арифметические операции с координатами векторов соответствуют линейным операциям, производимым над самими векторами.* Этот вопрос сразу решается теоремами 17 и 18 n° 152, если принять во внимание, что (декартовы) координаты вектора суть его проекции на координатные оси. Именно, согласно теореме 17 *при сложении векторов их координаты складываются.* Таким образом, если

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \quad \text{и} \quad \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

то

$$\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \{X_1 + X_2;\quad Y_1 + Y_2;\quad Z_1 + Z_2\}.$$

Отсюда следует, что

$$\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \{X_1 - X_2;\quad Y_1 - Y_2;\quad Z_1 - Z_2\}.$$

Это же обстоятельство можно выразить символически одним соотношением:

$$\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \pm \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\} = \{X_1 \pm X_2;\ Y_1 \pm Y_2;\ Z_1 \pm Z_2\}. \quad (6)$$

Далее, согласно теореме 18 *при умножении вектора на число его координаты умножаются на то же число.* Таким образом, если $\boldsymbol{a}=\{X;\ Y;\ Z\}$, то для любого числа α

$$\alpha\boldsymbol{a}=\{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}.$$

Это обстоятельство можно выразить символически еще так:

$$\alpha\{X;\ Y;\ Z\}=\{\alpha X;\ \alpha Y;\ \alpha Z\}. \qquad (7)$$

154. Из предыдущего легко выводится *условие коллинеарности двух векторов*, заданных своими координатами.

Именно, векторы $\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ коллинеарны в том и только в том случае, когда один из них может быть получен умножением другого на некоторое число: $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$ (предполагаем $\boldsymbol{a}\neq 0$). Векторное равенство

$$\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$$

равносильно трем числовым:

$$X_2=\lambda X_1,\quad Y_2=\lambda Y_1,\quad Z_2=\lambda Z_1,$$

а эти последние равенства означают, что координаты вектора $\boldsymbol{b}$ пропорциональны координатам вектора $\boldsymbol{a}$. Следовательно, *векторы $\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\}$ и $\boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$ коллинеарны в том и только в том случае, когда*

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1},$$

т. е. когда их координаты пропорциональны.

§ 52. Разложение векторов на компоненты

155. Если нам задана в пространстве какая-нибудь система декартовых прямоугольных координат, то вместе с нею мы будем рассматривать некоторую определенную тройку векторов; мы будем обозначать их символами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Эти векторы определяются следующими условиями:

1) вектор $\boldsymbol{i}$ лежит на оси Ox, вектор $\boldsymbol{j}$ — на оси Oy, вектор $\boldsymbol{k}$ — на оси Oz;

2) каждый из векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ направлен на своей оси в положительную сторону;

3) векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные, т. е. $|\boldsymbol{i}|=1$, $|\boldsymbol{j}|=1$, $|\boldsymbol{k}|=1$.

Оказывается, что *любой вектор в пространстве может быть выражен через векторы* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ *при помощи линейных операций.* Как получается такое выражение, мы сейчас покажем.

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{a}$. Будем предполагать (для удобства изложения), что он приложен к началу координат. Обозначим конец вектора $\boldsymbol{a}$ буквой A. Проведем через точку A прямую, параллельную оси Oz. Она должна пересечь плоскость Oxy; обозначим точку пересечения буквой B. Проведем затем через точку B прямую, параллельную оси Oy, и прямую, параллельную оси Ox. Первая из них должна пересечь ось Ox, вторая — ось Oy. Обозначим эти точки пересечения соответственно символами A_x и A_y. Проведем, наконец, через точку A прямую, параллельную прямой OB; эта прямая должна пересечь ось Oz в некоторой точке, которую мы обозначим символом A_z (рис. 96).

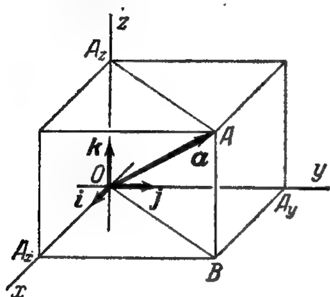


Рис. 96.

Согласно правилу сложения векторов (применительно к параллелограмму $OBAA_z$) имеем:

$$\boldsymbol{a}=\overline{OB}+\overline{OA_z}. \tag{1}$$

Точно так же по правилу сложения векторов (применительно к параллелограмму OA_yBA_x)

$$\overline{OB}=\overline{OA_x}+\overline{OA_y}. \tag{2}$$

Вследствие равенств (1) и (2)

$$\boldsymbol{a}=\overline{OA_x}+\overline{OA_y}+\overline{OA_z}. \tag{3}$$

Так как векторы $\overline{OA_x}$ и $\boldsymbol{i}$ лежат на одной прямой, то $\overline{OA_x}$ может быть получен путем «растяжения» вектора $\boldsymbol{i}$; таким образом, можем написать: $\overline{OA_x}=\lambda\boldsymbol{i}$, где λ — некоторое число.

Аналогично, $\overline{OA}_y = \mu \boldsymbol{j}$ и $\overline{OA}_z = \nu \boldsymbol{k}$ (рис. 96 соответствует случаю, когда числа λ, μ и ν положительны).

Из равенства (3) и соотношений $\overline{OA}_x = \lambda \boldsymbol{i}$, $\overline{OA}_y = \mu \boldsymbol{j}$, $\overline{OA}_z = \nu \boldsymbol{k}$ получаем

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{i} + \mu \boldsymbol{j} + \nu \boldsymbol{k}. \tag{4}$$

Тем самым мы показали, что любой вектор $\boldsymbol{a}$ в пространстве действительно может быть выражен при помощи линейных операций через векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Имея в виду все векторы в пространстве выражать указанным образом через векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, мы будем эту тройку векторов называть *координатным базисом.*

Представление вектора $\boldsymbol{a}$ *в виде суммы* $\lambda \boldsymbol{i} + \mu \boldsymbol{j} + \nu \boldsymbol{k}$ *называется разложением вектора* $\boldsymbol{a}$ *по базису* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Числа λ, μ, ν носят название *коэффициентов* этого разложения; векторы $\lambda \boldsymbol{i}$, $\mu \boldsymbol{j}$, $\nu \boldsymbol{k}$ принято называть *составляющими* (или *компонентами*) вектора $\boldsymbol{a}$ по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Векторы $\lambda \boldsymbol{i}$, $\mu \boldsymbol{j}$, $\nu \boldsymbol{k}$ называют составляющими вектора $\boldsymbol{a}$ потому, что *они в сумме составляют вектор* $\boldsymbol{a}$.

156. Теперь мы постараемся выяснить геометрический смысл коэффициентов λ, μ, ν. Так как $\overline{OA}_x = \lambda \boldsymbol{i}$, а $\boldsymbol{i}$ — единичный вектор, то число λ есть отношение отрезка $\overline{OA}_x$ к единице измерения, взятой со знаком плюс или минус в зависимости от того, направлен ли этот отрезок так же, как и вектор $\boldsymbol{i}$, или противоположно ему. Иначе говоря, λ есть величина отрезка $\overline{OA}_x$ на оси Ox, понимаемая так, как определено в n° 2, т. е. $\lambda = OA_x$. Но OA_x есть не что иное, как проекция вектора $\boldsymbol{a} = \overline{OA}$ на ось Ox. Следовательно,

$$\lambda = \text{пр}_x \boldsymbol{a} = X.$$

Аналогично

$$\mu = \text{пр}_y \boldsymbol{a} = Y, \quad \nu = \text{пр}_z \boldsymbol{a} = Z.$$

157. Все изложенное в n°n° 155, 156 мы можем резюмировать в виде следующей теоремы:

Теорема 19. *Каким бы ни был вектор* $\boldsymbol{a}$, *он всегда может быть разложен по базису* $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, *т. е. может быть представлен в виде*

$$\boldsymbol{a} = X\boldsymbol{i} + Y\boldsymbol{j} + Z\boldsymbol{k};$$

коэффициенты этого разложения определяются вектором $\boldsymbol{a}$ *однозначно, именно* X, Y, Z *суть проекции вектора* $\boldsymbol{a}$ *на координатные оси* (т. е. координаты вектора $\boldsymbol{a}$).

158. Заметим теперь, что разложение векторов можно производить не только по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$.

Пусть даны три вектора $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$. Для наглядности будем представлять себе, что они приведены к общему началу O. Относительно этих векторов мы не делаем никаких специальных предположений (считаем их векторами любой длины и с любыми углами наклона друг к другу). Мы потребуем только соблюдения одного условия: будучи приведены к общему началу O, векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ не должны лежать в одной плоскости. При этом условии справедлива следующая теорема:

Каким бы ни был вектор $\boldsymbol{a}$, *он всегда может быть выражен в виде линейной комбинации векторов* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2 + \nu \boldsymbol{a}_3. \tag{5}$$

Такое выражение вектора $\boldsymbol{a}$ называется *разложением его по базису* $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$.

Для доказательства высказанной теоремы проведем через точку O три оси Ox, Oy, Oz по направлениям векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ соответственно. После этого равенство (5) можно установить путем буквального повторения выкладок и рассуждений, с помощью которых было доказано равенство (4). Следует лишь всюду векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ заменять векторами $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ (параллелепипед, изображенный на рис. 96, следует при этом представлять себе косым).

Остается выяснить геометрический смысл коэффициентов λ, μ, ν в равенстве (5). Мы имеем: $\overline{OA_x} = \lambda \boldsymbol{a}_1$; отсюда следует, что λ есть величина отрезка $\overline{OA_x}$ оси Ox, если в качестве масштабного отрезка на этой оси принят вектор $\boldsymbol{a}_1$. Аналогичный смысл имеют μ и ν. Отрезки OA_x, OA_y, OA_z иногда называют косыми проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ на оси Ox, Oy, Oz. Соответственно можно сказать, что коэффициенты λ, μ, ν в равенстве (5) являются величинами косых проекций вектора $\boldsymbol{a}$ на оси Ox, Oy, Oz, если каждая проекция измерена на своей оси в своем масштабе. Отсюда следует, что *коэффициенты разложения данного вектора по данному базису определяются единственным образом* (поскольку они выражают вполне определенные геометрические величины).

159. Если вектор $\boldsymbol{a}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, то его разложение по базису $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ имеет вид:

$$\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2,$$

т. е. $\nu = 0$. В самом деле, в этом случае точка A совпадает с точкой B и, следовательно, $\overline{OA_z} = 0$.

Если мы имеем в виду рассматривать только векторы, лежащие в одной определенной плоскости, и только их разлагать по базису, то достаточно брать базис из двух векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, лежащих в данной плоскости (третий вектор становится излишним). В качестве базиса можно брать любую пару векторов $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ данной плоскости, но с обязательным условием: если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$ приведены к общему началу O, то они не должны располагаться на одной прямой. Иначе говоря, базис на плоскости обязательно состоит из неколлинеарных векторов. Естественно, что построение составляющих на плоскости проще, чем в пространстве; оно изображено на рис. 96а. Имеем:

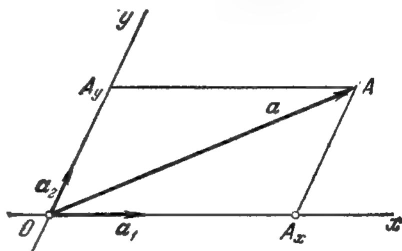


Рис. 96а.

$$\boldsymbol{a} = \overline{OA} = \overline{OA}_x + \overline{OA}_y = \lambda \boldsymbol{a}_1 + \mu \boldsymbol{a}_2.$$

Отрезки OA_x, OA_y являются косыми проекциями вектора $\boldsymbol{a}$ на оси Ox, Oy; коэффициенты λ и μ — их величины, при условии, что в качестве масштабных отрезков на осях приняты векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$.

ГЛАВА 9

СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

§ 53. Скалярное произведение и его основные свойства

160. *Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению модулей этих векторов на косинус угла между ними.*

Скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ обозначается символом $\boldsymbol{ab}$.

Обозначим угол между векторами $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ через φ; тогда скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ мы сможем выразить формулой:

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Для дальнейшего важно заметить, что $|\boldsymbol{b}|\cos\varphi = \text{пр}_a\boldsymbol{b}$ (см. n° 132), следовательно,

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_a\boldsymbol{b}. \qquad (2)$$

Аналогично, $|\boldsymbol{a}|\cos\varphi = \text{пр}_b\boldsymbol{a}$, и мы получаем также

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_b\boldsymbol{a}. \qquad (3)$$

Таким образом, *скалярное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *можно рассматривать или как произведение двух чисел, из которых одно есть модуль вектора* $\boldsymbol{a}$, *другое — проекция вектора* $\boldsymbol{b}$ *на ось вектора* $\boldsymbol{a}$, *или как произведение двух чисел, из которых одно есть модуль вектора* $\boldsymbol{b}$, *другое — проекция вектора* $\boldsymbol{a}$ *на ось вектора* $\boldsymbol{b}$.

161. Понятие скалярного произведения имеет свой источник в механике. Именно, если (свободный) вектор $\boldsymbol{a}$ изображает силу, точка приложения которой перемещается из

начала в конец вектора $\boldsymbol{b}$, то работа w этой силы определяется равенством *)

$$w = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi.$$

В векторном исчислении эту величину называют произведением двух векторов на том основании, что она обладает некоторыми алгебраическими свойствами обыкновенного произведения чисел (они будут указаны в следующем параграфе). Ее называют скалярным произведением, так как она является скаляром (числом).

162. Скалярное произведение обладает следующими алгебраическими свойствами:

1. Свойство перестановочности сомножителей:

$$\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}.$$

Доказательство. По определению $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}|\cos\varphi$ и $\boldsymbol{ba} = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}|\cos\varphi$; но $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{b}|\,|\boldsymbol{a}|$, поскольку это есть просто произведение чисел, следовательно, $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

2. Свойство сочетательности относительно умножения на число:

$$(\alpha\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \alpha\,(\boldsymbol{ab}).$$

Доказательство. По формуле (3) мы имеем:

$$(\alpha\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,(\alpha\boldsymbol{a}).$$

Но согласно теореме 18 (n° 152) $\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$. Таким образом,

$$(\alpha\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\,(\alpha\boldsymbol{a}) = |\boldsymbol{b}|\,\alpha\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \alpha\,(|\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}).$$

С другой стороны, по той же формуле (3) $|\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{ab}$. Следовательно,

$$(\alpha\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{b} = \alpha\,(|\boldsymbol{b}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}) = \alpha\,(\boldsymbol{ab}).$$

Замечание 1. Из свойств 1 и 2 следует, что

$$(\alpha\boldsymbol{a})\,(\beta\boldsymbol{b}) = (\alpha\beta)\,(\boldsymbol{ab}).$$

Действительно,

$$(\alpha\boldsymbol{a})\,(\beta\boldsymbol{b}) = \alpha\,(\boldsymbol{a}\,(\beta\boldsymbol{b})) = \alpha\,((\beta\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}) = \alpha\,(\beta\,(\boldsymbol{ba})) = (\alpha\beta)\,(\boldsymbol{ba}) = (\alpha\beta)\,(\boldsymbol{ab}).$$

---

*) См., например, И. М. Воронков, Курс теоретической механики, «Наука», 1966, § 107.

3. Свойство распределительности относительно сложения:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}.$$

Доказательство. По формуле (2) мы имеем:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}).$$

Но согласно теореме 17 (n° 152) $\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\,(\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c})=$$
$$=|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}.$$

С другой стороны, по той же формуле (2) $|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}=\boldsymbol{ab}$ и $|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ac}$. Следовательно,

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{a}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ac}.$$

Последнее из доказанных свойств скалярного произведения дает право при скалярном перемножении векторных многочленов выполнять действие почленно. В силу первого свойства можно при этом не заботиться о порядке сомножителей. Второе свойство позволяет тогда (см. выше замечание 1) объединять числовые коэффициенты векторных сомножителей. Например,

$$(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{d})=(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})=$$
$$=(2\boldsymbol{a})(3\boldsymbol{c})+(5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})+(2\boldsymbol{a})(4\boldsymbol{d})+(5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})=$$
$$=6\boldsymbol{ac}+15\boldsymbol{bc}+8\boldsymbol{ad}+20\boldsymbol{bd}.$$

Замечание 2. В одном отношении скалярное произведение векторов существенно не сходно с обыкновенным произведением чисел: так как скалярное произведение двух векторов есть уже не вектор, а число, то бессмысленно говорить о скалярном произведении трех или большего числа векторных сомножителей. Заметим, что символ $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ можно понимать только так: $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ есть произведение числа $\boldsymbol{ab}$ на вектор $\boldsymbol{c}$, т. е. $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c}$ есть вектор $\boldsymbol{c}$, «растянутый» в $\boldsymbol{ab}$ «раз».

163. Здесь мы приведем ряд важных геометрических свойств скалярного произведения.

1. *Если неравные нулю векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ составляют острый угол, то скалярное произведение $\boldsymbol{ab}$ положительно.*

В самом деле, если φ — острый угол, то $\cos\varphi > 0$; следовательно,

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi > 0.$$

2. *Если неравные нулю векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *составляют тупой угол, то скалярное произведение* $\boldsymbol{ab}$ *отрицательно.*

В самом деле, если φ — тупой угол, то $\cos\varphi < 0$; следовательно,

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi < 0.$$

3. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *перпендикулярны друг к другу, то* $\boldsymbol{ab} = 0$.

В самом деле, если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны, то $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и $\cos\varphi = 0$; следовательно, $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = 0$.

4. *Если скалярное произведение двух векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *равно нулю, то векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *взаимно перпендикулярны.*

В самом деле, если хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ равен нулю, то его можно считать перпендикулярным к другому, так как нулевой вектор можно считать направленным любым образом; если же ни один из этих векторов не равен нулю, то вследствие равенства $\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi = 0$ должно быть $\cos\varphi = 0$, т. е. $\varphi = \frac{\pi}{2}$, что и означает перпендикулярность векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Последние два свойства можно высказать совместно следующим образом: *скалярное произведение двух векторов обращается в нуль тогда и только тогда, когда эти векторы взаимно перпендикулярны.*

Наконец, мы отметим еще одно свойство скалярного произведения:

5. *При скалярном умножении вектора самого на себя получается квадрат его модуля:*

$$\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2.$$

В самом деле, $\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}|\cos 0$; но $\cos 0 = 1$, следовательно, $\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}|^2$.

Замечание. Скалярное произведение $\boldsymbol{aa}$ называется скалярным квадратом вектора $\boldsymbol{a}$ и обозначается символом $\boldsymbol{a}^2$. На основании предыдущего мы имеем: $\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2$, т. е. *скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля.*

§ 54. Выражение скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов

164. Следующая теорема дает возможность вычислять скалярное произведение двух векторов, зная их координаты, т. е. проекции на оси некоторой декартовой прямоугольной системы координат:

Теорема 20. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *заданы своими координатами:*

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

то скалярное произведение их определяется формулой

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2.$$

Доказательство. Предварительно составим «таблицу умножения» базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{array}{lll} \boldsymbol{i}^2 = 1, & \boldsymbol{ij} = 0, & \boldsymbol{ik} = 0, \\ \boldsymbol{ji} = 0, & \boldsymbol{j}^2 = 1, & \boldsymbol{jk} = 0, \\ \boldsymbol{ki} = 0, & \boldsymbol{kj} = 0, & \boldsymbol{k}^2 = 1. \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Здесь скалярные произведения различных базисных векторов равны нулю, так как они взаимно перпендикулярны (см. свойство 3, n° 163); $\boldsymbol{i}^2 = 1$, $\boldsymbol{j}^2 = 1$, $\boldsymbol{k}^2 = 1$, так как $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ суть единичные векторы (см. свойство 5 n° 163).

Разложим теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{a} = X_1\boldsymbol{i} + Y_1\boldsymbol{j} + Z_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b} = X_2\boldsymbol{i} + Y_2\boldsymbol{j} + Z_2\boldsymbol{k} \end{array}\right\} \qquad (2)$$

(см. теорему 19 n° 157). На основании установленных в n° 162 алгебраических свойств скалярного произведения мы можем, вычисляя $\boldsymbol{ab}$, перемножать правые части равенства (2) почленно:

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2\boldsymbol{i}^2 + X_1Y_2\boldsymbol{ij} + X_1Z_2\boldsymbol{ik} + \\ + Y_1X_2\boldsymbol{ji} + Y_1Y_2\boldsymbol{j}^2 + Y_1Z_2\boldsymbol{jk} + Z_1X_2\boldsymbol{ki} + Z_1Y_2\boldsymbol{kj} + Z_1Z_2\boldsymbol{k}^2.$$

Пользуясь таблицей (1) умножения базисных векторов, находим отсюда:

$$\boldsymbol{ab} = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2,$$

что и требовалось.

Содержание установленной теоремы можно выразить еще так: *скалярное произведение двух векторов равно сумме попарных произведений соответствующих координат этих векторов.*

165. Мы укажем сейчас ряд важных следствий теоремы 20.

Следствие 1. *Необходимым и достаточным условием перпендикулярности векторов*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \ \text{и}\ \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

является равенство

$$X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2=0. \tag{3}$$

В самом деле, согласно n° 163 векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ взаимно перпендикулярны в том и только в том случае, когда $\boldsymbol{ab}=0$. Но по теореме 20 имеем: $\boldsymbol{ab}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$. Следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ перпендикулярны в том и только в том случае, когда выполняется равенство (3).

Следствие 2. *Угол* φ *между векторами*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\} \ \text{и}\ \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\}$$

определяется равенством

$$\cos\varphi=\frac{X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}}. \tag{4}$$

В самом деле, по определению скалярного произведения $\boldsymbol{ab}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\varphi$; отсюда

$$\cos\varphi=\frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}. \tag{5}$$

Но по теореме 20 имеем: $\boldsymbol{ab}=X_1X_2+Y_1Y_2+Z_1Z_2$, а по теореме 16 (n° 139) $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}$, $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}$. Отсюда и из формулы (5) получается формула (4).

Следствие 3. *Если некоторая ось u составляет с координатными осями углы* α, β, γ, *то проекция произвольного вектора* $\boldsymbol{s}=\{X;\ Y;\ Z\}$ *на эту ось определяется равенством*

$$\text{пр}_u\boldsymbol{s}=X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma. \tag{6}$$

Для доказательства предположим, что направление оси u задано единичным вектором $\boldsymbol{e}$. Согласно формуле (2) n° 160 мы имеем: $\boldsymbol{es}=|\boldsymbol{e}|\,\text{пр}_e\boldsymbol{s}$. Заметим теперь, что $|\boldsymbol{e}|=1$ и $\text{пр}_e\boldsymbol{s}=\text{пр}_u\boldsymbol{s}$. Таким образом, $\text{пр}_u\boldsymbol{s}=\boldsymbol{es}$. Так как вектор $\boldsymbol{e}$

направлен по данной оси u, то он составляет с координатными осями те же углы, что и эта ось, т. е. α, β, γ. Отсюда заключаем (см. теорему 16 n° 139), что

$$\text{пр}_x e = |e| \cos\alpha, \ \text{пр}_y e = |e| \cos\beta, \ \text{пр}_z e = |e| \cos\gamma;$$

но $|e| = 1$, следовательно,

$$e = \{\cos\alpha; \ \cos\beta; \ \cos\gamma\}.$$

Имея $s = \{X; \ Y; \ Z\}$ и $e = \{\cos\alpha; \ \cos\beta; \ \cos\gamma\}$, по теореме 20 находим: $\text{пр}_u s = es = X\cos\alpha + Y\cos\beta + Z\cos\gamma$, что и требовалось.

166. Пример 1. Даны три точки $A(1; \ 1; \ 1)$, $B(2; \ 2; \ 1)$ и $C(2; \ 1; \ 2)$. Найти угол $\varphi = \angle BAC$.

Решение. Применяя теорему 15 (n° 135), находим:

$$\overline{AB} = \{1; \ 1; \ 0\}, \qquad \overline{AC} = \{1; \ 0; \ 1\}.$$

Отсюда и на основании следствия 2 теоремы 20:

$$\cos\varphi = \frac{1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}\,\sqrt{1^2+0^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, $\varphi = 60°$.

Пример 2. Даны точки $A(1; \ 1; \ 1)$ и $B(4; \ 5; \ -3)$. Найти проекцию вектора $\overline{AB}$ на ось u, составляющую с координатными осями равные острые углы.

Решение. Пусть $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы оси u; по условию задачи они равны друг другу и положительны (так как α, β, γ — одинаковые острые углы). Но согласно равенству (4) n° 140

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Отсюда и на основании только что сказанного

$$\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

По теореме 15 (n° 135)

$$\overline{AB} = \{3; \ 4; \ -4\}.$$

Нам остается применить следствие 3 теоремы 20, т. е. формулу (6); применяя ее, находим:

$$\text{пр}_u \overline{AB} = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} + 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} - 4\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

ГЛАВА 10

ВЕКТОРНОЕ И СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§ 55. Векторное произведение и его основные свойства

167. Здесь мы определим новое действие над векторами: векторное произведение. При этом мы будем предполагать, что в пространстве выбрана некоторая система декартовых прямоугольных координат.

*Векторным произведением вектора **a** на вектор **b** называется вектор, обозначаемый символом* $[\boldsymbol{ab}]$, *который определяется следующими тремя условиями:*

1) *модуль вектора* $[\boldsymbol{ab}]$ *равен* $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi$, *где* φ — *угол между векторами **a** и **b**;*

2) *вектор* $[\boldsymbol{ab}]$ *перпендикулярен к каждому из векторов **a** и **b**;*

3) *вектор* $[\boldsymbol{ab}]$ *относительно векторов **a** и **b** направлен так же, как координатная ось* Oz *относительно координатных осей* Ox *и* Oy. Точнее, если все три вектора **a**, **b** и $[\boldsymbol{ab}]$ приведены к общему началу, то вектор $[\boldsymbol{ab}]$ должен быть направлен так, чтобы из конца его кратчайший поворот вектора **a** к вектору **b** был виден совершающимся в ту же сторону, в какую усматривается кратчайший поворот положительной полуоси Ox к положительной полуоси Oy, если смотреть из какой-нибудь точки положительной полуоси Oz.

Для определенности предположим, что в выбранной системе координат кратчайший поворот положительной полуоси Ox к положительной полуоси Oy виден из точек положительной полуоси Oz совершающимся *против часовой*

стрелки. Такая система координат называется *правой*. Правую систему можно охарактеризовать еще следующим образом: направление оси Oz этой системы указывает средний палец правой руки, большой палец которой направлен по оси Ox, а указательный — по оси Oy *).

Соответственно выбору правой системы координат придается определенное направление и векторному произведению $[\boldsymbol{ab}]$. Именно, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{ab}]$ приведены к общему началу, то вектор $[\boldsymbol{ab}]$ должен быть направлен так, чтобы из конца его кратчайший поворот вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ (т. е. первого сомножителя ко второму) был виден совершающимся *против часовой стрелки* (рис. 97). Можно применять также *«правило правой руки»*: если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $[\boldsymbol{ab}]$ приведены к общему началу, то вектор $[\boldsymbol{ab}]$ должен быть направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому сомножителю (т. е. по вектору $\boldsymbol{a}$), а указательный — по второму (т. е. по вектору $\boldsymbol{b}$). На это правило мы и будем чаще всего ссылаться.

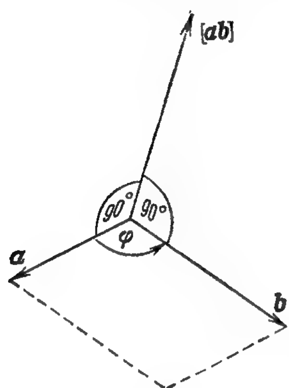


Рис. 97.

168. Понятие векторного произведения имеет свой источник в механике. Именно, если вектор $\boldsymbol{b}$ изображает силу, приложенную к какой-нибудь точке M, а вектор $\boldsymbol{a}$ идет из некоторой точки O в точку M, то вектор $[\boldsymbol{ab}]$ представляет собой момент силы $\boldsymbol{b}$ относительно точки O **).

В векторном исчислении $[\boldsymbol{ab}]$ называют п р о и з в е д е н и е м векторов на том основании, что эта величина обладает некоторыми алгебраическими свойствами произведения чисел (см. в п° 171 второе и третье свойства). Ее назы-

*) Система координат называется *левой*, если оси Ox, Oy, Oz направлены аналогично большому, указательному и среднему пальцам левой руки.

**) См., например, И. М. В о р о н к о в, Курс теоретической механики, «Наука», 1966, § 44.

вают векторным произведением, так как она является вектором.

169. В первую очередь мы отметим важнейшие геометрические свойства векторного произведения.

1. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны, то их векторное произведение равно нулю.*

Доказательство. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то угол φ между ними либо равен 0 (в случае, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в одну сторону), либо равен 180° (в случае, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ направлены в противоположные стороны). И в том, и в другом случае $\sin\varphi = 0$. Следовательно, $|[\boldsymbol{ab}]| = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = 0$, т. е. модуль вектора $[\boldsymbol{ab}]$ равен нулю, а значит, и сам вектор $[\boldsymbol{ab}]$ равен нулю.

2. *Если векторное произведение векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *равно нулю, то векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *коллинеарны.*

Доказательство. Пусть $[\boldsymbol{ab}] = 0$; тогда $|[\boldsymbol{ab}]| = 0$, а значит, $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = 0$. Если ни один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не равен нулю, то из предыдущего равенства получаем $\sin\varphi = 0$, следовательно, векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если же хотя бы один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ равен нулю, то мы вправе считать его коллинеарным другому, так как нулевой вектор можно считать направленным любым образом.

Оба свойства векторного произведения мы выскажем теперь совместно так: *векторное произведение двух векторов обращается в нуль тогда и только тогда, когда эти векторы коллинеарны.*

3. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *приведены к общему началу, то модуль векторного произведения* $[\boldsymbol{ab}]$ *равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

Доказательство. Обозначим площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, буквой S. Как известно из элементарной геометрии, площадь параллелограмма равна произведению его смежных сторон на синус угла между ними. Отсюда $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\varphi = S$, следовательно,

$$|[\boldsymbol{ab}]| = S, \tag{1}$$

что и утверждалось.

170. На основании последнего свойства векторное произведение можно выразить формулой:

$$[\boldsymbol{ab}] = S\boldsymbol{e}, \tag{2}$$

где $\boldsymbol{e}$ — вектор, определяемый следующими тремя условиями:

1) модуль вектора $\boldsymbol{e}$ равен единице;

2) вектор $\boldsymbol{e}$ перпендикулярен к каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$;

3) вектор $\boldsymbol{e}$ направлен так, как направлен средний палец правой руки, большой палец которой направлен по вектору $\boldsymbol{a}$, а указательный — по вектору $\boldsymbol{b}$ (предполагается, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{e}$ приведены к общему началу).

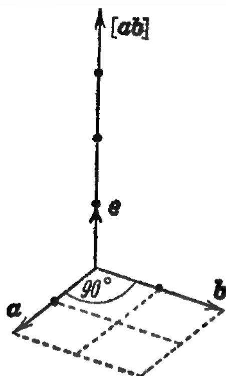


Рис. 98.

Чтобы доказать формулу (2), сравним условия, которые определяют вектор $\boldsymbol{e}$, с условиями, которые определяют векторное произведение $[\boldsymbol{ab}]$; из этого сравнения легко заключить, что векторы $[\boldsymbol{ab}]$ и $\boldsymbol{e}$ коллинеарны друг другу, причем направлены в одну сторону. Таким образом, вектор $[\boldsymbol{ab}]$ может быть получен умножением вектора $\boldsymbol{e}$ на некоторое положительное число; это число равно отношению модуля вектора $[\boldsymbol{ab}]$ к модулю вектора $\boldsymbol{e}$, а так как $|\boldsymbol{e}|=1$, то оно равно просто модулю вектора $[\boldsymbol{ab}]$, т. е. числу S. Тем самым $[\boldsymbol{ab}]=S\boldsymbol{e}$, что и требовалось (рис. 98 иллюстрирует формулу (2) в случае $|\boldsymbol{a}|=2$, $|\boldsymbol{b}|=2$, $\varphi=90°$).

171. Теперь мы установим алгебраические свойства векторного произведения.

1. Свойство антиперестановочности сомножителей:

$$[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}], \tag{3}$$

т. е. *векторное произведение $\boldsymbol{a}$ на $\boldsymbol{b}$ есть вектор, обратный векторному произведению $\boldsymbol{b}$ на $\boldsymbol{a}$.*

Доказательство. Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то как $[\boldsymbol{ab}]$, так и $[\boldsymbol{ba}]$ обращаются в нуль, следовательно, равенство (3) справедливо. Предположим теперь, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны.

Заметим прежде всего, что согласно первым двум условиям определения векторного произведения векторы $[\boldsymbol{ab}]$ и $[\boldsymbol{ba}]$ имеют одинаковые модули и коллинеарны друг другу;

таким образом, либо $[\boldsymbol{ab}]=[\boldsymbol{ba}]$, либо $[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}]$. Остается решить вопрос, какая из этих двух возможностей в действительности имеет место. Этот вопрос решается третьим условием. Именно, если мы сначала направим большой и указательный пальцы правой руки соответственно по векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, а затем — по векторам $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$, то нам при этом придется повернуть кисть руки так, что направление среднего пальца во втором случае окажется противоположным тому направлению, какое он имел в первом случае. Следовательно, $[\boldsymbol{ab}]$ и $[\boldsymbol{ba}]$ имеют взаимно противоположные направления, т. е. $[\boldsymbol{ab}]=-[\boldsymbol{ba}]$.

2. Свойство сочетательности по отношению к скалярному множителю:

$$[(\lambda \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}]=\lambda\, [\boldsymbol{ab}] \tag{4}$$

и

$$[\boldsymbol{a}\, (\lambda \boldsymbol{b})]=\lambda\, [\boldsymbol{ab}]. \tag{5}$$

Доказательство. Формула (5) сводится к формуле (4) при помощи перестановки сомножителей векторных произведений в ее левой и правой частях (с последующей заменой буквы $\boldsymbol{b}$ буквой $\boldsymbol{a}$ и буквы $\boldsymbol{a}$ буквой $\boldsymbol{b}$). Таким образом, достаточно доказать формулу (4).

Заметим прежде всего, что если $\lambda=0$ или если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то формула (4) с очевидностью верна, так как в этих случаях левая и правая части ее будут равны нулю. Предположим теперь, что $\lambda \neq 0$ и векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны.

Согласно первому условию в определении векторного произведения модуль вектора $[\boldsymbol{ab}]$ равен $|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \varphi$, где φ — угол между векторами $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; следовательно, модуль вектора $\lambda\, [\boldsymbol{ab}]$ равен $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \varphi$. По тому же условию модуль вектора $[(\lambda \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}]$ равен $|\lambda|\,|\boldsymbol{a}|\,|\boldsymbol{b}| \sin \psi$, где ψ — угол между векторами $\lambda \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Но угол ψ равен либо углу φ (если λ положительно), либо углу $\pi-\varphi$ (если λ отрицательно); и в том и в другом случае $\sin \varphi=\sin \psi$. Отсюда следует, что модуль вектора $[(\lambda \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}]$ равен модулю вектора $\lambda\, [\boldsymbol{ab}]$.

Согласно второму условию в определении векторного произведения оба вектора $\lambda\, [\boldsymbol{ab}]$ и $[(\lambda \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}]$ перпендикулярны к каждому из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$; следовательно, векторы $\lambda\, [\boldsymbol{ab}]$ и $[(\lambda \boldsymbol{a})\, \boldsymbol{b}]$ коллинеарны друг другу.

Поскольку векторы $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ и $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ имеют одинаковые модули и коллинеарны, они либо равны, либо взаимно обратны, т. е. либо $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}]$, либо $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=-\lambda[\boldsymbol{ab}]$. Остается решить вопрос, какая из этих двух возможностей в действительности имеет место. Нам придется отдельно рассмотреть случай, когда $\lambda>0$, и случай, когда $\lambda<0$.

Пусть $\lambda>0$; тогда векторы $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$ направлены одинаково. В этом случае согласно правилу правой руки векторы $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ и $[\boldsymbol{ab}]$ направлены в одну сторону; но при $\lambda>0$ вектор $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ направлен так же, как вектор $[\boldsymbol{ab}]$. Следовательно, вектор $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ направлен так же, как вектор $\lambda[\boldsymbol{ab}]$, а значит, $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}]$. Пусть $\lambda<0$; тогда векторы $\lambda\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{a}$ имеют противоположные направления. В этом случае согласно правилу правой руки вектор $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ направлен противоположно вектору $[\boldsymbol{ab}]$; но при $\lambda<0$ и вектор $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ направлен противоположно вектору $[\boldsymbol{ab}]$. Следовательно, векторы $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]$ и $\lambda[\boldsymbol{ab}]$ направлены одинаково, а значит, $[(\lambda\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\lambda[\boldsymbol{ab}]$. Мы видим, что это соотношение справедливо всегда.

3. Распределительное свойство относительно сложения:

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}] \tag{6}$$

и

$$[(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}]=[\boldsymbol{ba}]+[\boldsymbol{ca}]. \tag{7}$$

Доказательство. Формула (7) сводится к формуле (6) при помощи перестановки сомножителей в ее левой и правой частях. Таким образом, нам достаточно доказать формулу (6). Заметим еще, что при $\boldsymbol{a}=0$ формула (6), очевидно, верна. Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\boldsymbol{a}\neq 0$.

Рассмотрим сначала частный случай, когда первый вектор является единичным, а два других к нему перпендикулярны.

Приведем все три вектора к общему началу O. Обозначим первый (единичный) вектор через $\boldsymbol{a}_0$; пусть $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$ — два других вектора (перпендикулярных к $\boldsymbol{a}_0$), $\overline{OD}$ — их сумма: $\overline{OD}=\overline{OB}+\overline{OC}$ (рис. 99). Введем обозначения:

$$\overline{OB}^*=[\boldsymbol{a}_0\overline{OB}],\quad \overline{OC}^*=[\boldsymbol{a}_0\overline{OC}],\quad \overline{OD}^*=[\boldsymbol{a}_0\overline{OD}]=[\boldsymbol{a}_0(\overline{OB}+\overline{OC})].$$

В силу первых двух условий в определении векторного произведения имеем:

1) $|\overline{OB^*}| = |[\boldsymbol{a}_0 \overline{OB}]| = |\boldsymbol{a}_0| |\overline{OB}| \sin 90° = |\overline{OB}|$.

2) $\overline{OB^*} \perp \boldsymbol{a}_0$, $\overline{OB^*} \perp \overline{OB}$.

Отсюда следует, что вектор $\overline{OB^*}$ может быть получен путем поворота вектора $\overline{OB}$ вокруг $\boldsymbol{a}_0$ на угол 90°. Кроме того, в силу третьего условия этот поворот будет виден

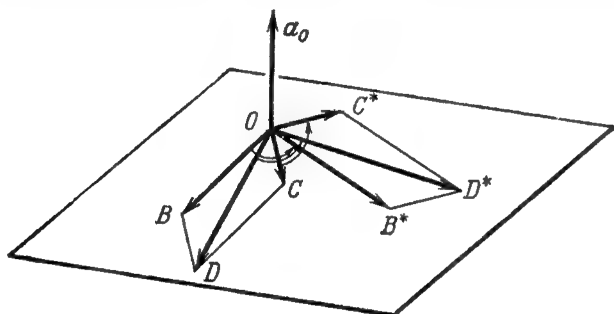


Рис. 99.

совершающимся против часовой стрелки, если смотреть из конца вектора $\boldsymbol{a}_0$. Аналогично, путем поворота векторов $\overline{OC}$ и $\overline{OD}$ вокруг $\boldsymbol{a}_0$ на угол 90° и в ту же сторону получаются векторы $\overline{OC^*}$ и $\overline{OD^*}$. Таким образом, вся фигура $OB^*D^*C^*$ получается путем некоторого поворота параллелограмма $OBDC$; следовательно, $OB^*D^*C^*$ — параллелограмм. Отсюда заключаем, что $\overline{OD^*} = \overline{OB^*} + \overline{OC^*}$ или

$$[\boldsymbol{a}_0 \overline{OD}] = [\boldsymbol{a}_0 \overline{OB}] + [\boldsymbol{a}_0 \overline{OC}]. \tag{8}$$

Это и есть равенство (6) в данном частном случае.

Пусть теперь $\boldsymbol{a}$ — какой угодно вектор, перпендикулярный к векторам $\overline{OB}$ и $\overline{OC}$. Обозначим через $\boldsymbol{a}_0$ единичный вектор, направленный так же, как $\boldsymbol{a}$; имеем $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \boldsymbol{a}_0$. Умножим обе части равенства (8) на число $|\boldsymbol{a}|$ и заменим $|\boldsymbol{a}| \boldsymbol{a}_0$ через $\boldsymbol{a}$; получим:

$$[\boldsymbol{a}\ \overline{OD}] = [\boldsymbol{a}\ \overline{OB}] + [\boldsymbol{a}\ \overline{OC}]. \tag{9}$$

Рассмотрим, наконец, векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, расположенные произвольным образом. Предположим, что они приведены к общему началу O. Проведем через концы векторов $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$ прямые, параллельные вектору $\boldsymbol{a}$. Проведем затем через точку O плоскость, перпендикулярную к этим прямым; пусть она пересечет их соответственно в точках B, C и D (рис. 100).

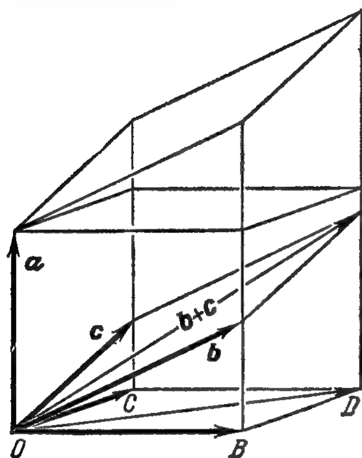


Рис. 100.

Рассмотрим векторные произведения $[\boldsymbol{ab}]$ и $[\boldsymbol{a}\overline{OB}]$; легко понять, что они представляют собой один и тот же вектор. В самом деле, во-первых, модуль вектора $[\boldsymbol{ab}]$ равен модулю вектора $[\boldsymbol{a}\overline{OB}]$, так как площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, равна площади прямоугольника, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\overline{OB}$; во-вторых, векторы $[\boldsymbol{ab}]$ и $[\boldsymbol{a}\overline{OB}]$ коллинеарны, так как оба они перпендикулярны к одной и той же плоскости (именно к той, в которой лежат векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\overline{OB}$); наконец, в соответствии с правилом правой руки, векторы $[\boldsymbol{ab}]$ и $[\boldsymbol{a}\overline{OB}]$ направлены в одну сторону. Итак,

$$[\boldsymbol{a}\overline{OB}]=[\boldsymbol{ab}].$$

Аналогично

$$[\boldsymbol{a}\overline{OC}]=[\boldsymbol{ac}], \quad [\boldsymbol{a}\overline{OD}]=[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})].$$

Подставляя эти выражения в равенство (9), получаем:

$$[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=[\boldsymbol{ab}]+[\boldsymbol{ac}],$$

что и требовалось.

172. Последнее из доказанных алгебраических свойств векторного произведения дает право при перемножении векторных многочленов выполнять действие почленно. Второе свойство позволяет объединять числовые коэффициенты

векторных сомножителей. Например,

$$[(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c}+4\boldsymbol{d})]=[(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})]+[(2\boldsymbol{a}+5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})]=$$
$$=[(2\boldsymbol{a})(3\boldsymbol{c})]+[(5\boldsymbol{b})(3\boldsymbol{c})]+[(2\boldsymbol{a})(4\boldsymbol{d})]+[(5\boldsymbol{b})(4\boldsymbol{d})]=$$
$$=6[\boldsymbol{ac}]+15[\boldsymbol{bc}]+8[\boldsymbol{ad}]+20[\boldsymbol{bd}].$$

Следует, однако, твердо помнить, что порядок сомножителей векторного произведения является существенным. Согласно первому свойству (n° 171) *при перестановке сомножителей векторного произведения нужно ставить перед ним знак минус.*

Замечание. Как показано в n° 169, векторное произведение коллинеарных векторов равно нулю. В частности, равно нулю векторное произведение одинаковых множителей: $[\boldsymbol{aa}]=0$. Поэтому в векторном исчислении понятие векторного квадрата не употребляется.

§ 56. Выражение векторного произведения через координаты перемножаемых векторов

173. Следующая теорема дает возможность вычислять векторное произведение двух векторов, зная их координаты, т. е. проекции на оси декартовой прямоугольной системы координат.

Теорема 21. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *заданы своими координатами:*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},$$

то векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ *на вектор* $\boldsymbol{b}$ *определяется формулой*

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}. \qquad (1)$$

Доказательство. Предварительно составим таблицу векторного умножения базисных векторов. Согласно замечанию, сделанному в конце n° 172, $[\boldsymbol{ii}]=0$, $[\boldsymbol{jj}]=0$, $[\boldsymbol{kk}]=0$. Рассмотрим теперь векторное произведение $[\boldsymbol{ij}]$. Модуль вектора $[\boldsymbol{ij}]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ (см. n° 169, свойство 3). Этот параллелограмм представляет собой квадрат со стороной, равной единице, следовательно, его площадь равна единице. Таким образом, $[\boldsymbol{ij}]$ есть

единичный вектор. Принимая во внимание, что вектор $[\boldsymbol{ij}]$ должен быть перпендикулярен к векторам $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ и направлен согласно правилу правой руки, легко понять, что он совпадает с третьим базисным вектором $\boldsymbol{k}$, т. е. $[\boldsymbol{ij}]=\boldsymbol{k}$. Аналогично рассуждая, найдем равенства: $[\boldsymbol{jk}]=\boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{ki}]=\boldsymbol{j}$. Остается выразить $[\boldsymbol{ji}]$, $[\boldsymbol{kj}]$ и $[\boldsymbol{ik}]$; но $[\boldsymbol{ji}]=-[\boldsymbol{ij}]$, $[\boldsymbol{kj}]=-[\boldsymbol{jk}]$, $[\boldsymbol{ik}]=-[\boldsymbol{ki}]$; следовательно, $[\boldsymbol{ji}]=-\boldsymbol{k}$, $[\boldsymbol{kj}]=-\boldsymbol{i}$, $[\boldsymbol{ik}]=-\boldsymbol{j}$. Итак, искомая таблица умножения такова:

$$\left.\begin{matrix} [\boldsymbol{ii}]=0, & [\boldsymbol{ij}]=\boldsymbol{k}, & [\boldsymbol{ik}]=-\boldsymbol{j}, \\ [\boldsymbol{ji}]=-\boldsymbol{k}, & [\boldsymbol{jj}]=0, & [\boldsymbol{jk}]=\boldsymbol{i}, \\ [\boldsymbol{ki}]=\boldsymbol{j}, & [\boldsymbol{kj}]=-\boldsymbol{i}, & [\boldsymbol{kk}]=0. \end{matrix}\right\} \qquad (2)$$

Разложим теперь векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{a}&=X_1\boldsymbol{i}+Y_1\boldsymbol{j}+Z_1\boldsymbol{k}, \\ \boldsymbol{b}&=X_2\boldsymbol{i}+Y_2\boldsymbol{j}+Z_2\boldsymbol{k} \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

(см. теорему 19; n° 157). На основании установленных в n° 171 алгебраических свойств векторного произведения мы можем, вычисляя $[\boldsymbol{ab}]$, перемножать правые части равенств (3) почленно:

$$[\boldsymbol{ab}]=X_1X_2[\boldsymbol{ii}]+X_1Y_2[\boldsymbol{ij}]+X_1Z_2[\boldsymbol{ik}]+ \\ +Y_1X_2[\boldsymbol{ji}]+Y_1Y_2[\boldsymbol{jj}]+Y_1Z_2[\boldsymbol{jk}]+ \\ +Z_1X_2[\boldsymbol{ki}]+Z_1Y_2[\boldsymbol{kj}]+Z_1Z_2[\boldsymbol{kk}].$$

Пользуясь таблицей (2) умножения базисных векторов, отсюда находим:

$$[\boldsymbol{ab}]=(Y_1Z_2-Y_2Z_1)\boldsymbol{i}-(X_1Z_2-X_2Z_1)\boldsymbol{j}+(X_1Y_2-X_2Y_1)\boldsymbol{k}$$

или

$$[\boldsymbol{ab}]=\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\boldsymbol{k}. \qquad (4)$$

Мы получили разложение вектора $[\boldsymbol{ab}]$ по базису $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$; коэффициенты этого разложения представляют собой координаты вектора $[\boldsymbol{ab}]$. Таким образом,

$$[\boldsymbol{ab}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}, \qquad (1)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Для удобства вычислений по формуле (1) полезно координаты заданных векторов записать предварительно в виде следующей таблицы:

$$\begin{pmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{pmatrix}.$$

Закрывая здесь сначала первый столбец, потом второй и, наконец, третий, мы получим последовательно три определителя второго порядка; вычисляя их и беря второй со знаком минус, мы тем самым найдем три координаты векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$.

Заметим еще, что формуле (4) (которая равносильна формуле (1)) можно придать вид:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}. \quad (5)$$

В самом деле, если развернуть этот определитель по элементам первой строки, то получится точно то же выражение, которое стоит в правой части формулы (4).

174. Пример 1. Даны векторы $\boldsymbol{a} = \{2;\ 5;\ 7\}$ и $\boldsymbol{b} = \{1;\ 2;\ 4\}$. Найти координаты векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$.

Решение. В соответствии с замечанием, сделанным в конце предыдущего n°, составим таблицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Закрывая последовательно столбцы этой таблицы, мы получим три определителя второго порядка; вычисляя их и беря второй со знаком минус, найдем искомые проекции

$$[\boldsymbol{ab}] = \{6;\ -1;\ -1\}.$$

Пример 2. В пространстве даны три точки: $A\,(1;\ 1;\ 1)$, $B\,(2;\ 2;\ 2)$ и $C\,(4;\ 3;\ 5)$. Найти площадь S_Δ треугольника ABC.

Решение. Рассмотрим векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Согласно n° 169 (свойство 3) модуль векторного произведения $[\overline{AB}\,\overline{AC}]$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$. Но искомая площадь S_Δ треугольника ABC равна половине площади этого параллелограмма; следовательно,

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\,|\,[\overline{AB}\,\overline{AC}]\,|.$$

Остается подсчитать правую часть указанного равенства.

Прежде всего, пользуясь теоремой 15 (n° 135), найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$:

$$\overline{AB}=\{1;\ 1;\ 1\},\quad \overline{AC}=\{3;\ 2;\ 4\}.$$

Отсюда $[\overline{AB}\,\overline{AC}]=\{2;\ -1;\ -1\}$ и $|[\overline{AB}\,\overline{AC}]|=\sqrt{2^2+1^2+1^2}=\sqrt{6}.$ Таким образом, $S_\Delta=\frac{1}{2}\sqrt{6}.$

§ 57. Смешанное произведение трех векторов

175. Пусть даны какие-нибудь векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Представим себе, что вектор $\boldsymbol{a}$ умножается векторно на $\boldsymbol{b}$ и полученный вектор $[\boldsymbol{ab}]$ умножается скалярно на вектор $\boldsymbol{c}$; тем самым определяется число $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$. Оно называется *векторно-скалярным* или *смешанным произведением* трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (мы будем употреблять последнее название, так как оно короче). В ближайших параграфах мы изучим основные свойства смешанного произведения и укажем ряд задач, где смешанное произведение может быть с успехом использовано.

176. Условимся говорить, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях. Так как геометрические векторы суть векторы свободные, то в случае компланарности векторов их всегда возможно при помощи параллельного перенесения расположить в одной плоскости. В частности, компланарные векторы расположатся в одной плоскости, если их привести к общему началу.

177. Если одновременно с заданием трех векторов сказано, какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим, то говорят, что задана упорядоченная тройка векторов; впрочем, в дальнейшем, опуская прилагательное, мы будем говорить просто: тройка векторов. В тексте тройка векторов будет записываться в порядке нумерации; например, если мы пишем: $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, то, значит, $\boldsymbol{a}$ считается первым вектором, $\boldsymbol{b}$ — вторым, $\boldsymbol{c}$ — третьим; если мы пишем: $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, то, значит, $\boldsymbol{b}$ считается первым вектором, $\boldsymbol{c}$ — вторым, $\boldsymbol{a}$ — третьим.

178. Тройка некомпланарных векторов называется *правой*, если составляющие ее векторы, будучи приведены к общему началу, располагаются в порядке нумерации аналогично тому,

как расположены большой, указательный и средний пальцы правой руки. Подробнее: тройка некомпланарных векторов называется правой, если ее третий вектор расположен относительно плоскости первых двух с той же стороны, с какой расположится средний палец правой руки, большой палец которой направлен по первому вектору тройки, а указательный — по второму.

Тройка некомпланарных векторов называется *левой*, если составляющие ее векторы, будучи приведены к общему началу, располагаются в порядке нумерации аналогично тому, как расположены большой, указательный и средний пальцы левой руки.

Тройки компланарных векторов не относятся ни к правым, ни к левым.

179. Пусть даны какие-нибудь некомпланарные векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Нумеруя их всеми различными способами, мы получим шесть троек: $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$; $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$; $\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}$; $\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}$; $\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$. При помощи непосредственного наблюдения модели (которую легко изготовить из проволоки) можно убедиться в том, что среди указанных шести троек имеются три правых и три левых. При этом

$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c};\quad \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a};\quad \mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$$

суть тройки одной ориентации, т. е. либо все правые, либо все левые;

$$\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c};\quad \mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b};\quad \mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a}$$

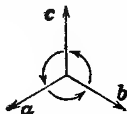
суть тройки другой ориентации *).

180. Следующая важная теорема выражает геометрический смысл смешанного произведения:

Теорема 22. *Смешанное произведение* $[\mathbf{ab}]\mathbf{c}$ *равно объему параллелепипеда, построенного на векторах* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$,

---

*) Можно указать также следующий наглядный способ различения троек. Вообразим, что мы находимся внутри телесного угла данной тройки векторов. Тогда, если обход от первого вектора ко второму, затем от второго к третьему и, наконец, от третьего к первому виден совершающимся против часовой стрелки, то данная тройка — правая, если по часовой стрелке — то левая. Согласно этому правилу тройки $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$; $\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}$ и $\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ на приложенном чертеже — правые.



взятому со знаком плюс, если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — *правая, со знаком минус, если эта тройка левая. Если же векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны, то* $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}=0$.

Доказательство. Предположим сначала, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Обозначим через S площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, и через $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор, определенный, как в n° 170. По формуле (2) n° 170 мы имеем:

$$[\boldsymbol{ab}]=S\boldsymbol{e}.$$

Отсюда

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}=S\,(\boldsymbol{ec})=S\,|\boldsymbol{e}|\,\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}=S\,\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}. \qquad (1)$$

Но $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}=\pm h$, где h есть высота параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ при условии, что основанием считается параллелограмм, построенный на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ (рис. 101). Таким образом, обозначая объем параллелепипеда через V и принимая во внимание, что $hS=V$, из равенства (1) найдем:

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}=\pm V. \qquad (2)$$

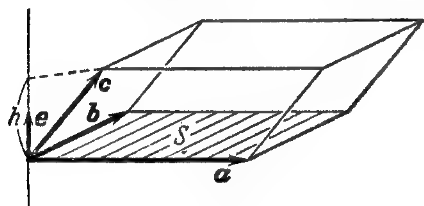


Рис. 101.

Теперь нам нужно установить, в каких случаях здесь будет знак плюс, в каких — минус. С этой целью заметим, что $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}=+h$, если вектор $\boldsymbol{c}$ расположен по ту же сторону от плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, по какую лежит вектор $\boldsymbol{e}$, т. е. если тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — той же ориентации, что и тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ (см. n° 178); $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}=-h$, если векторы $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{e}$ лежат по разные стороны от плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, т. е. если тройки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ — различных ориентаций. Но по определению вектора $\boldsymbol{e}$ (см. n° 170) тройка $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{e}$ — правая. Следовательно, в формуле (2) имеет место знак плюс, если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — правая тройка, и знак минус, если левая. Если же вектор $\boldsymbol{c}$ лежит в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, т. е. если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то $\text{пр}_{\boldsymbol{e}}\boldsymbol{c}=0$, и, как видно из равенства (1), $[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}=0$. Тем самым все утверждения теоремы доказаны, но в предположении, что векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Остается рассмотреть случай, когда

векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. В этом случае $[\boldsymbol{ab}]=0$, а значит, и $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=0$, что также согласуется с формулировкой теоремы, так как если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то все три вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

Теорема доказана.

181. Из теоремы 22 легко выводится следующее тождество:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]. \tag{3}$$

Доказательство. Так как в скалярном произведении можно переставлять сомножители, то

$$\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]=[\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}. \tag{4}$$

Далее, по теореме 22 мы имеем:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\pm V, \quad [\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}=\pm V. \tag{5}$$

Согласно n° 179 тройки $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$ — одной ориентации; поэтому и на основании теоремы 22 в правых частях равенств (5) нужно брать один и тот же знак. Таким образом, из равенств (5) мы получаем:

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=[\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}.$$

Отсюда и вследствие равенства (4)

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}],$$

что и утверждалось.

182. В дальнейшем смешанные произведения $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$ мы будем обозначать более простым символом: $\boldsymbol{abc}$. То, что при этом не указано, какие из векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ перемножаются векторно, не может вызвать недоразумений, так как $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]$.

183. Подчеркнем, что из теоремы 22 непосредственно вытекает следующее утверждение:

Смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ равно нулю в том и только в том случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны.

В самом деле, то, что $\boldsymbol{abc}=0$, в случае компланарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ прямо утверждается теоремой 22. То же, что $\boldsymbol{abc}=0$ только в случае компланарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, следует из этой же теоремы; именно, если векторы

$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не компланарны, то построенный на них параллелепипед имеет отличный от нуля объем, следовательно, $\boldsymbol{abc} \neq 0$.

То же самое утверждение можно высказать еще так:

Необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *является равенство нулю их смешанного произведения:* $\boldsymbol{abc} = 0$.

§ 58. Выражение смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов

184. Теорема 23. *Если векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *заданы своими координатами:*

$$\boldsymbol{a} = \{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b} = \{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\quad \boldsymbol{c} = \{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

то смешанное произведение $\boldsymbol{abc}$ *определяется формулой*

$$\boldsymbol{abc} = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Доказательство. Мы имеем $\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$. По теореме 21 (n° 173),

$$[\boldsymbol{ab}] = \left\{ \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ -\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Умножая этот вектор скалярно на вектор $\boldsymbol{c} = \{X_3;\ Y_3;\ Z_3\}$ и пользуясь теоремой 20 (n° 164), получаем:

$$\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix} X_3 - \begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix} Y_3 +$$

$$+ \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix} Z_3 = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix},$$

что и требовалось.

Пример. В пространстве даны четыре точки: $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(4;\ 4;\ 4)$, $C(3;\ 5;\ 5)$, $D(2;\ 4;\ 7)$. Найти объем тетраэдра $ABCD$.

Решение. Как известно из элементарной геометрии, объем V_T тетраэдра $ABCD$ равен одной шестой объема параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$; отсюда и из теоремы 22 заключаем, что V_T равняется одной шестой абсолютной величины сме-

шанного произведения $\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}$. Остается подсчитать это смешанное произведение. Прежде всего найдем координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$. По теореме 15 n° 135 имеем: $\overline{AB}=\{3; 3; 3\}$, $\overline{AC}=\{2; 4; 4\}$, $\overline{AD}=\{1; 3; 6\}$.

Применим теперь теорему 23:

$$\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD}=\begin{vmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}=18.$$

Отсюда: $V_т=3$.

185. Согласно n° 183 *необходимым и достаточным условием компланарности трех векторов является равенство нулю их смешанного произведения.*

Отсюда и на основании теоремы 23 заключаем: *если векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *заданы своими координатами:*

$$\boldsymbol{a}=\{X_1;\ Y_1;\ Z_1\},\quad \boldsymbol{b}=\{X_2;\ Y_2;\ Z_2\},\quad \boldsymbol{c}=\{X_3;\ Y_3;\ Z_3\},$$

то необходимым и достаточным условием компланарности этих векторов является соотношение

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}=0,$$

т. е. *равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из координат векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$.

ГЛАВА 11

УРАВНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ И УРАВНЕНИЯ ЛИНИИ

§ 59. Уравнение поверхности

186. Как известно, некоторые простейшие поверхности (плоскость, сфера, круглый цилиндр, круглый конус) легко поддаются исследованию средствами элементарной геометрии. Но общая задача исследования многообразных поверхностей, встречающихся в различных вопросах самой математики и ее приложений, требует более совершенных методов алгебры и анализа. В основе же применения методов алгебры и анализа лежит некоторый единообразный способ задания поверхности, именно, способ задания ее при помощи уравнения.

187. Пусть x, y, z — произвольные переменные величины. Это означает, что под символами x, y, z подразумеваются какие угодно (вещественные) числа. Соотношение вида $F(x, y, z)=0$, где $F(x, y, z)$ означает какое-нибудь выражение, содержащее x, y, z, мы будем называть уравнением с тремя переменными x, y, z, если $F(x, y, z)=0$ есть равенство, верное не всегда, т. е. не для всяких троек чисел x, y, z.

Говорят, что три числа $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$ удовлетворяют какому-нибудь данному уравнению с тремя переменными, если при подстановке их в это уравнение вместо переменных оно станет верным равенством. Если $F(x, y, z)=0$ является тождеством, то ему удовлетворяют любые числа x, y, z.

188. Важнейшим понятием пространственной аналитической геометрии является понятие уравнения поверхности. Что под этим подразумевается, мы сейчас объясним.

Пусть в пространстве дана какая-нибудь поверхность и вместе с тем выбрана некоторая система координат.

Уравнением данной поверхности (в выбранной системе координат) *называется такое уравнение с тремя переменными, которому удовлетворяют координаты каждой точки, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на ней.*

Таким образом, если известно уравнение поверхности, то относительно каждой точки пространства можно решить вопрос: лежит она на этой поверхности или нет. Для этого достаточно координаты испытуемой точки подставить в уравнение вместо переменных; если эти координаты удовлетворяют уравнению, точка лежит на поверхности, если не удовлетворяют, — не лежит.

Высказанное определение дает основу методам аналитической геометрии в пространстве; суть их заключается в том, что рассматриваемые поверхности исследуются при помощи анализа их уравнений. При этом, если поверхность определена чисто геометрически, то исследование начинают с вывода уравнения поверхности. Но во многих задачах уравнение поверхности играет роль первичного данного, а сама поверхность рассматривается как нечто вторичное. Иначе говоря, часто заранее дается какое-нибудь уравнение и тем самым определяется некоторая поверхность.

189. Если уравнение дано и мы отвечаем на вопрос: «что́ такое определенная им поверхность» (или «что́ такое поверхность, имеющая его своим уравнением»), то удобно пользоваться следующей формулировкой:

Поверхность, определенная данным уравнением (в некоторой системе координат), есть геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

Замечание. Если $M(x; y; z)$ — переменная точка поверхности, то x, y, z называют *текущими координатами.*

190. Пример. В декартовых прямоугольных координатах уравнение

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2=r^2 \qquad (1)$$

определяет сферу, центр которой находится в точке $C(\alpha; \beta; \gamma)$ и радиус которой равен r.

В самом деле, если $M(x; y; z)$ — произвольная точка, то $\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\gamma)^2}=CM$. Отсюда ясно, что урав-

нению (1) удовлетворяют координаты тех и только тех точек, которые удалены от точки C на расстояние r. Следовательно, геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют этому уравнению, есть сфера с центром $C(\alpha; \beta; \gamma)$ и радиусом r.

§ 60. Уравнения линии. Задача о пересечении трех поверхностей

191. В пространственной аналитической геометрии каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей и соответственно этому определяется заданием двух уравнений.

Именно, если $F(x, y, z)=0$ и $\Phi(x, y, z)=0$ суть уравнения двух поверхностей, пересекающихся по некоторой линии L, то линия L есть геометрическое место общих точек этих поверхностей, т. е. точек, координаты которых удовлетворяют одновременно и уравнению $F(x, y, z)=0$, и уравнению $\Phi(x, y, z)=0$.

Таким образом, *два уравнения*

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\}$$

совместно определяют линию L.

Например, два уравнения

$$\left.\begin{aligned} (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=14, \\ x^2+y^2+z^2=1 \end{aligned}\right\}$$

совместно определяют окружность (как пересечение двух сфер).

192. Если $F(x, y, z)=0$, $\Phi(x, y, z)=0$, $\Psi(x, y, z)=0$ суть уравнения трех поверхностей, то каждое совместное решение системы

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0, \\ \Psi(x, y, z)=0 \end{aligned}\right\}$$

дает координаты общей точки этих поверхностей. Следовательно, *геометрическая задача разыскания точек пересечения трех поверхностей равносильна алгебраической задаче*

совместного решения системы трех уравнений с тремя неизвестными.

П р и м е р. Найти точки пересечения трех поверхностей при условии, что первая поверхность есть сфера с центром $(-1; -1; 0)$ и радиусом 5, вторая поверхность есть сфера с центром $(1; 1; 3)$ и радиусом 4, а третья поверхность есть плоскость, параллельная плоскости Oxy и лежащая в верхнем полупространстве на расстоянии трех единиц от плоскости Oxy.

Р е ш е н и е. Задача сводится к совместному решению трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} (x+1)^2+(y+1)^2+z^2&=25,\\ (x-1)^2+(y-1)^2+(z-3)^2&=16,\\ z&=3. \end{aligned}\right\}$$

Полагая в первых двух уравнениях $z=3$ и раскрывая скобки, мы получим:

$$x^2+y^2+2x+2y=14,$$
$$x^2+y^2-2x-2y=14.$$

Отсюда $x+y=0$, $x^2+y^2=14$; следовательно, $x=\pm\sqrt{7}$, $y=-x$. Итак, получаем две точки: $(\sqrt{7}; -\sqrt{7}; 3)$ и $(-\sqrt{7}; \sqrt{7}; 3)$.

§ 61. Уравнение цилиндрической поверхности с образующими, параллельными одной из координатных осей

193. Здесь мы специально рассмотрим уравнение вида $F(x, y)=0$. Особенностью этого уравнения является то, что левая часть его не содержит переменной z. Это означает, что данное уравнение накладывает связь только на первые две координаты, третья же может принимать любые значения.

Мы докажем, что *уравнение такого вида определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz.*

Обозначим буквой S поверхность, определяемую некоторым уравнением вида $F(x, y)=0$. Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — произвольная точка поверхности S. Так как точка M_0 лежит на S, то числа x_0, y_0, z_0 удовлетворяют уравнению $F(x, y)=0$; но тогда числа x_0, y_0, z, где z — любое число, также удовлетворяют этому уравнению, поскольку $F(x, y)$ от z не зависит. Следовательно, п р и л ю б о м z точка $M(x_0; y_0; z)$ лежит на поверхности S (рис. 102). А это означает,

что на поверхности S целиком лежит прямая, проходящая через точку M_0 параллельно оси Oz. Таким образом, поверхность S составлена из прямых, параллельных оси Oz, т. е. она является цилиндрической поверхностью и расположена так, как мы утверждали.

Заметим, что на плоскости Oxy в системе координат, которая задается осями Ox и Oy, уравнение $F(x, y)=0$ определяет линию, именно, *направляющую* рассматриваемого цилиндра. Но эта же линия в пространственной системе координат должна быть задана двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} F(x, y)=0, \\ z=0. \end{aligned}\right\}$$

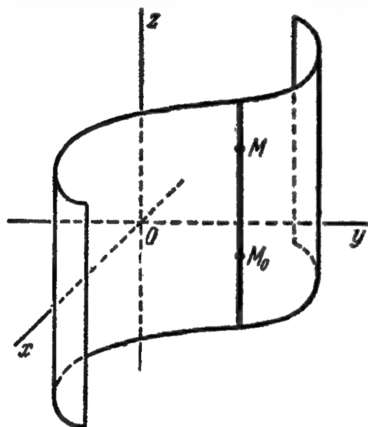


Рис. 102.

Пример. В пространственной системе координат уравнение $x^2+y^2=r^2$ определяет круглый цилиндр; направляющая этого цилиндра (окружность), лежащая в плоскости Oxy, определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2=r^2, \\ z=0. \end{aligned}\right\}$$

194. По аналогии с предыдущим легко понять, что уравнение $F(x, z)=0$ (в пространстве) определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy; уравнение $F(y, z)=0$ определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Ox.

195. Рассмотрим в пространстве линию L, определенную уравнениями

$$\left.\begin{aligned} F(x, y, z)=0, \\ \Phi(x, y, z)=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Пусть

$$\Psi(x, y)=0 \qquad (2)$$

есть уравнение, *полученное из системы* (1) *исключением переменной* z. Это означает, что

1) уравнение (2) является следствием системы (1), т. е. каждый раз, когда три числа x, y, z удовлетворяют обоим уравнениям системы (1), первые два из них удовлетворяют уравнению (2);

2) если два числа x, y удовлетворяют уравнению (2), то найдется третье число z такое, что три числа x, y, z будут удовлетворять обоим уравнениям системы (1).

Согласно сказанному в n° 193 уравнение (2) определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oz. Далее, вследствие первого из только что отмеченных свойств уравнения (2) каждая точка линии L лежит на этой цилиндрической поверхности, т. е. эта поверхность проходит через линию L. Наконец, вследствие второго свойства каждая образующая этой поверхности проходит через какую-нибудь точку линии L. На основании всего сказанного мы можем заключить, что поверхность, определяемая уравнением $\Psi(x, y)=0$, состоит из прямых, которые проектируют точки линии L на плоскость Oxy; ввиду этого ее называют *цилиндрической поверхностью, проектирующей линию L на плоскость Oxy* (или, просто, *проектирующим цилиндром*).

Проекция линии L на плоскость Oxy определяется двумя уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \Psi(x, y)=0, \\ z=0. \end{aligned}\right\}$$

Аналогичным путем при помощи исключения из системы (1) переменной x или переменной y можно получить проекции линии L на плоскость Oyz или на плоскость Oxz.

Пример. Пересечением двух сфер определена окружность

$$\left.\begin{aligned} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Найти ее проекцию на плоскость Oxy.

Решение. Нам нужно найти уравнение цилиндра, проектирующего данную окружность на плоскость Oxy. Для этого следует исключить z из уравнений (3). Вычитая из первого уравнения системы (3) второе, получим:

$$y+z=1; \qquad (4)$$

отсюда $z=1-y$. Подставляя вместо z выражение $1-y$ в любое из данных уравнений, найдем:

$$x^2+2y^2-2y=0. \qquad (5)$$

Это и есть искомый результат исключения z из системы (3).

Действительно, уравнение (5) есть следствие уравнений (3). Кроме того, если x и y удовлетворяют уравнению (5), то первое из уравнений (3) дает

$$z=\pm\sqrt{1-x^2-y^2}=\pm\sqrt{1+2y^2-2y-y^2}=\pm(1-y);$$

из второго уравнения системы (3) имеем

$$z-1=\pm\sqrt{1-x^2-(y-1)^2}=\pm\sqrt{1+2y^2-2y-y^2+2y-1}=\pm y.$$

Таким образом, если два числа x и y удовлетворяют уравнению (5), то найдется третье число z, именно $z=1-y$, такое, что три числа x, y, z удовлетворяют обоим уравнениям системы (3).

Мы видим, что два условия (см. выше этот же п°), которым должен удовлетворять результат исключения z из системы (3), для уравнения (5) выполнены. Согласно сказанному выше уравнение (5) определяет цилиндр, проектирующий данную окружность на плоскость Oxy. Сама проекция дается двумя уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^2+2y^2-2y=0, \\ z=0. \end{aligned}\right\}$$

Так как первое уравнение приводится к виду $\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}}+\dfrac{\left(y-\frac{1}{2}\right)^2}{\frac{1}{4}}=1$, то найденная проекция является эллипсом с полуосями $a=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $b=\dfrac{1}{2}$.

§ 62. Алгебраические поверхности

196. Основным предметом изучения в пространственной аналитической геометрии являются поверхности, определяемые по отношению к декартовым прямоугольным координатам алгебраическими уравнениями. Это суть уравнения следующих видов:

$$Ax+By+Cz+D=0; \qquad (1)$$

$$Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Exz+2Fyz+ \\ +2Gx+2Hy+2Kz+L=0; \qquad (2)$$

. . . .

Здесь A, B, C, D, E и т. д.— некоторые фиксированные числа; они называются коэффициентами указанных уравнений.

Уравнение (1) называется *общим уравнением первой степени* (численные значения его коэффициентов могут быть

какими угодно, но при условии, что уравнение действительно содержит члены первой степени, т. е. одновременное обращение в нуль A, B, C исключается); уравнение (2) называется *общим уравнением второй степени* (численные значения его коэффициентов могут быть какими угодно, но при условии, что уравнение действительно содержит члены второй степени, т. е. случай, когда все шесть коэффициентов A, B, C, D, E, F равны нулю, исключается). Аналогичный вид имеют уравнения третьей, четвертой и т. д. степеней.

Поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется алгебраическим уравнением степени n, называется алгебраической поверхностью n-го порядка.

Можно доказать, что поверхность, которая определяется алгебраическим уравнением степени n в какой-нибудь системе декартовых прямоугольных координат, в любой другой системе таких же координат определяется также алгебраическим уравнением и той же степени n. Доказательство проводится аналогично тому, как доказывалась теорема 8 в n° 49, и основывается на формулах преобразования декартовых прямоугольных координат в пространстве.

197. Общая теория алгебраических поверхностей служит предметом специальных сочинений по аналитической геометрии. В этой книге рассматриваются только поверхности первого и второго порядков.

ГЛАВА 12

ПЛОСКОСТЬ КАК ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРВОГО ПОРЯДКА. УРАВНЕНИЯ ПРЯМОЙ

§ 63. Плоскость как поверхность первого порядка

В ближайших параграфах устанавливается, что поверхности первого порядка суть плоскости и только плоскости, и рассматриваются различные формы записи уравнений плоскостей.

198. Теорема 24. *В декартовых координатах каждая плоскость определяется уравнением первой степени.*

Доказательство. Считая заданной некоторую декартову прямоугольную систему координат, рассмотрим произвольную плоскость α и докажем, что эта плоскость определяется уравнением первой степени. Возьмем на плоскости α какую-нибудь точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$; выберем, кроме того, какой угодно вектор (только не равный нулю!), перпендикулярный к плоскости α. Выбранный вектор обозначим буквой $\boldsymbol{n}$, его проекции на оси координат — буквами A, B, C.

Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная точка. Она лежит на плоскости α в том и только в том случае, когда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{n}$. Иначе говоря, точка M, лежащая на плоскости α, характеризуется условием:

$$\overline{M_0M} \perp \boldsymbol{n}.$$

Мы получим уравнение плоскости α, если выразим это условие через координаты x, y, z. С этой целью запишем координаты векторов $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{n}$:

$$\overline{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\},$$
$$\boldsymbol{n} = \{A;\ B;\ C\}.$$

Согласно n° 165 признаком перпендикулярности двух векторов является равенство нулю их скалярного произведения, т. е. суммы попарных произведений соответственных координат этих векторов. Таким образом, $\overline{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$ в том и только в том случае, когда

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0. \qquad (1)$$

Это и есть искомое уравнение плоскости α, так как ему удовлетворяют координаты x, y, z точки M в том и только в том случае, когда M лежит на плоскости α (т. е. когда $\overline{M_0M} \perp \boldsymbol{n}$).

Раскрывая скобки, представим уравнение (1) в виде

$$Ax+By+Cz+(-Ax_0-By_0-Cz_0)=0.$$

Далее, обозначая число $-Ax_0-By_0-Cz_0$ буквой D, получим:

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Мы видим, что плоскость α действительно определяется уравнением первой степени. Теорема доказана.

199. Каждый (не равный нулю) вектор, перпендикулярный к некоторой плоскости, называется *нормальным* к ней вектором. Употребляя это название, мы можем сказать, что *уравнение*

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{A; B; C\}$.

Уравнение вида

$$Ax+By+Cz+D=0$$

называется *общим уравнением* плоскости.

200. Теорема 25. *В декартовых координатах каждое уравнение первой степени определяет плоскость.*

Доказательство. Считая заданной какую-нибудь декартову прямоугольную систему координат, рассмотрим произвольное уравнение первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (2)$$

Когда мы говорим «произвольное» уравнение, то подразумеваем при этом, что коэффициенты A, B, C, D могут быть какими угодно числами, но, конечно, исключая

случай одновременного равенства нулю всех трех коэффициентов A, B, C. Мы должны доказать, что уравнение (2) есть уравнение некоторой плоскости.

Пусть x_0, y_0, z_0 — какое-нибудь решение уравнения (2), т. е. тройка чисел, которая этому уравнению удовлетворяет *). Подставляя числа x_0, y_0, z_0 вместо текущих координат в левую часть уравнения (2), мы получим арифметическое тождество

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \quad (3)$$

Вычтем из уравнения (2) тождество (3). Мы получим уравнение

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \quad (1)$$

которое по предыдущему представляет собой уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ и имеющей нормальный вектор $\boldsymbol{n} = \{A;\ B;\ C\}$. Но уравнение (2) равносильно уравнению (1), так как уравнение (1) получается из уравнения (2) путем почленного вычитания тождества (3), а уравнение (2) в свою очередь получается из уравнения (1) путем почленного прибавления тождества (3). Следовательно, уравнение (2) является уравнением той же плоскости.

Мы доказали, что произвольное уравнение первой степени определяет плоскость; тем самым теорема доказана.

201. Поверхности, кооторые в декартовых координатах определяются уравнениями первой степени, называются, как мы знаем, поверхностями первого порядка. Употребляя эту терминологию, мы можем высказать установленные результаты так:

Каждая плоскость есть поверхность первого порядка; каждая поверхность первого порядка есть плоскость.

Пример. Составить уравнение плоскости, которая проходит через точку $M_0(1;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно к вектору $\boldsymbol{n} = \{2;\ 2;\ 3\}$.

Решение. Согласно n° 199 искомое уравнение есть

$$2(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0,$$

или

$$2x + 2y + 3z - 7 = 0.$$

---

*) Уравнение (2), как всякое уравнение первой степени с тремя неизвестными, имеет бесконечно много решений. Чтобы найти какое-нибудь из них, нужно двум неизвестным предписать численные значения, а третью неизвестную тогда найти из уравнения.

202. В заключение этого параграфа докажем следующее предложение: *если два уравнения* $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ *и* $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ *определяют одну и ту же плоскость, то коэффициенты их пропорциональны.*

В самом деле, в этом случае векторы $\boldsymbol{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ перпендикулярны к одной плоскости, следовательно, коллинеарны друг другу. Но тогда согласно n° 154 числа A_2, B_2, C_2 пропорциональны числам A_1, B_1, C_1; обозначив множитель пропорциональности через μ, имеем: $A_2=A_1\mu$, $B_2=B_1\mu$, $C_2=C_1\mu$. Пусть $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ — любая точка плоскости; ее координаты должны удовлетворять каждому из данных уравнений, таким образом, $A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1=0$ и $A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2=0$. Умножим первое из этих равенств на μ и вычтем из второго; получим $D_2-D_1\mu=0$. Следовательно, $D_2=D_1\mu$ и

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}=\frac{D_2}{D_1}=\mu.$$

Тем самым наше утверждение доказано.

§ 64. Неполные уравнения плоскостей. Уравнение плоскости «в отрезках»

203. Мы знаем, что к а ж д о е уравнение первой степени

$$Ax+By+Cz+D=0$$

(в декартовых координатах) определяет плоскость. Рассмотрим сейчас некоторые частные случаи уравнения первой степени, именно, случаи, когда какие-либо из коэффициентов A, B, C, D обращаются в нуль:

1) $D=0$; *уравнение имеет вид* $Ax+By+Cz=0$ *и определяет плоскость, проходящую через начало координат.*

Действительно, числа $x=0$, $y=0$, $z=0$ удовлетворяют уравнению $Ax+By+Cz=0$. Следовательно, начало координат принадлежит плоскости.

2) $C=0$; *уравнение имеет вид* $Ax+By+D=0$ *и определяет плоскость, параллельную оси* Oz (или проходящую через эту ось).

Действительно, в этом случае нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{A;\ B;\ C\}$ имеет нулевую проекцию на ось Oz ($C=0$);

следовательно, этот вектор перпендикулярен к оси Oz, а сама плоскость параллельна ей (или проходит через нее).

3) $B=0$ и $C=0$; *уравнение имеет вид* $Ax+D=0$ *и определяет плоскость, параллельную координатной плоскости* Oyz (или совпадающую с ней).

Действительно, в этом случае нормальный вектор $\boldsymbol{n}=\{A;\ B;\ C\}$ имеет нулевые проекции на оси Oy и Oz ($B=0$ и $C=0$); следовательно, вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен к осям Oy и Oz, а сама плоскость параллельна им (или проходит через каждую из них). Но это и означает, что плоскость, определяемая уравнением $Ax+D=0$, параллельна плоскости Oyz или совпадает с ней. В том же самом можно убедиться иным путем, так: представим уравнение $Ax+D=0$ в виде $x=-\frac{D}{A}$ и положим $-\frac{D}{A}=a$; получим:

$$x=a.$$

Согласно этому уравнению все точки плоскости имеют одинаковые абсциссы ($x=a$) и, следовательно, расположены на одном расстоянии от плоскости Oyz («впереди», если $a>0$, «позади», если $a<0$); следовательно, плоскость, определяемая таким уравнением, параллельна плоскости Oyz. Отсюда ясно также, что a есть величина отрезка, который отсекает плоскость на оси Ox (считая от начала координат). В частности, если $D=0$, то и $a=0$; в этом случае рассматриваемая плоскость совпадает с плоскостью Oyz. Таким образом, *уравнение* $x=0$ *определяет плоскость* Oyz.

204. По аналогии с предыдущим легко установить, что:
1. Уравнение вида $Ax+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Oy (или проходящую через нее); уравнение вида $By+Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную оси Ox (или проходящую через нее).

2. Уравнение вида $By+D=0$ определяет плоскость, параллельную плоскости Oxz (или совпадающую с ней); уравнение вида $Cz+D=0$ определяет плоскость, параллельную плоскости Oxy (или совпадающую с ней). Последние два уравнения могут быть написаны соответственно в виде $y=b$ и $z=c$. Здесь b и c суть величины отрезков, которые отсекают эти плоскости на координатных осях (первая — на оси Oy, вторая — на оси Oz). В частности, уравнение

$y=0$ определяет плоскость Oxz, уравнение $z=0$ определяет плоскость Oxy.

205. Пусть дано уравнение плоскости

$$Ax+By+Cz+D=0$$

при условии, что ни один из коэффициентов A, B, C, D не равен нулю. Такое уравнение может быть приведено к некоторому специальному виду, который бывает удобен в ряде задач аналитической геометрии.

Перенесем свободный член D в правую часть уравнения; мы получим:

$$Ax+By+Cz=-D.$$

Поделим затем обе части уравнения на $-D$; из предыдущего найдем:

$$\frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1,$$

или

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$

Вводя обозначения

$$a=-\frac{D}{A}, \qquad b=-\frac{D}{B}, \qquad c=-\frac{D}{C},$$

получим:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{1}$$

Это и есть тот специальный вид уравнения плоскости, который мы хотели получить. Здесь числа a, b, c имеют весьма простой геометрический смысл. Именно, a, b, c суть величины отрезков, которые плоскость отсекает на координатных осях (считая каждый от начала координат). Чтобы убедиться в этом, найдем точки пересечения плоскости с координатными осями. Точка пересечения плоскости с осью Ox определяется из уравнения этой плоскости $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ при дополнительном условии $y=0$, $z=0$; отсюда $x=a$ и, таким образом, величина отрезка, отсекаемого плоскостью на оси Ox, действительно равна a. Аналогично устанавливается,

что отрезки, отсекаемые плоскостью на осях Oy и Oz, имеют величины, равные соответственно b и c.

Уравнение вида (1) принято называть *уравнением плоскости «в отрезках»*.

Пример. Составить уравнение плоскости, зная, что она отсекает на координатных осях отрезки $a=2$, $b=-3$, $c=4$.

Решение. На основании предыдущего получаем искомое уравнение сразу: $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}+\frac{z}{4}=1$ или $6x-4y+3z-12=0$.

§ 65. Нормальное уравнение плоскости. Расстояние от точки до плоскости

206. Мы рассмотрим еще один специальный вид записи уравнения плоскости, известный под названием нормального уравнения плоскости.

Пусть дана какая-нибудь плоскость π. Проведем через начало координат прямую n, перпендикулярную к плоскости π, — мы будем называть эту прямую *нормалью*, — и

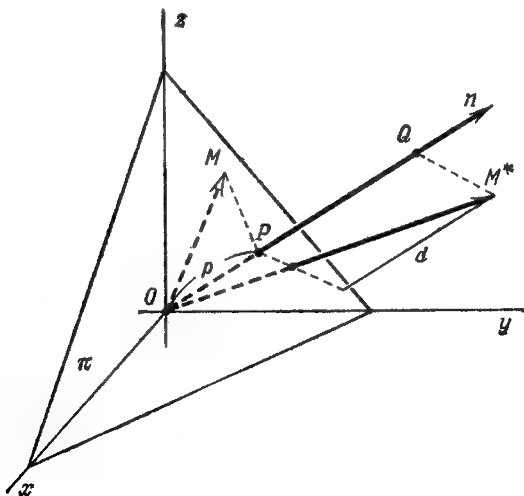


Рис. 103.

пометим буквой P точку, в которой она пересекает плоскость π (рис. 103). На нормали введем положительное нап-

равление от точки O к точке P (если точка P совпадает с точкой O, т. е. если данная плоскость проходит через начало координат, то положительное направление нормали выберем произвольно). Обозначим через α, β, γ углы, которые составляет направленная нормаль с осями координат, через p — длину отрезка OP.

Мы выведем уравнение данной плоскости π, считая известными числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ и p. С этой целью возьмем на плоскости π произвольную точку M и обозначим через x, y, z ее координаты. Очевидно, проекция вектора $\overline{OM}$ на нормаль равна OP, а так как положительное направление нормали совпадает с направлением отрезка $\overline{OP}$, то величина этого отрезка выражается положительным числом, именно, числом p; таким образом,

$$\text{пр}_n\overline{OM} = p. \tag{1}$$

Заметим теперь, что $\overline{OM} = \{x;\ y;\ z\}$. Отсюда и согласно следствию 3 теоремы 20 (n°165)

$$\text{пр}_n\overline{OM} = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{2}$$

Из равенств (1) и (2) следует, что $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$, или

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0. \tag{3}$$

Это и есть уравнение данной плоскости (ему, как видим, удовлетворяют координаты x, y, z каждой точки M, лежащей на данной плоскости; если же точка M не лежит на данной плоскости, то ее координаты уравнению (3) не удовлетворяют, так как тогда $\text{пр}_n\overline{OM} \neq p$).

Уравнение плоскости в форме (3) *называется нормальным уравнением плоскости; в этом уравнении* $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ *суть направляющие косинусы нормали, p — расстояние плоскости от начала координат.*

207. Пусть дана произвольная плоскость. Построим ее нормаль n и назначим на нормали положительное направление так, как было описано в предыдущем n°. Пусть, далее, M^* — какая угодно точка пространства, d — ее расстояние от данной плоскости (см. рис. 103).

Условимся называть *отклонением* точки M^* от данной плоскости число $+d$, если M^* лежит по ту сторону от

плоскости, куда идет положительное направление нормали, $-d$, если M^* лежит с другой стороны от данной плоскости. Отклонение точки от плоскости будем обозначать буквой δ; таким образом, $\delta = \pm d$, причем полезно заметить, что $\delta = +d$, когда точка M^* и начало координат лежат по разные стороны от плоскости, и $\delta = -d$, когда точка M^* и начало координат лежат по одну сторону от плоскости (для точек, лежащих на плоскости, $\delta = 0$).

Теорема 26. *Если точка M^* имеет координаты (x^*; y^*; z^*), а плоскость задана нормальным уравнением*

$$x \cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

то отклонение точки M^* от этой плоскости дается формулой

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p. \tag{4}$$

Доказательство. Спроектируем точку M^* на нормаль; пусть Q — ее проекция (см. рис. 103); тогда

$$\delta = PQ = OQ - OP,$$

где PQ, OQ и OP суть величины направленных отрезков нормали: $\overline{PQ}$, $\overline{OQ}$ и $\overline{OP}$. Но $OQ = \text{пр}_n \overline{OM^*}$, $OP = p$; следовательно,

$$\delta = \text{пр}_n \overline{OM}^* - p. \tag{5}$$

Согласно следствию 3 теоремы 20 (n° 165)

$$\text{пр}_n \overline{OM}^* = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma. \tag{6}$$

Из равенств (5) и (6) получаем:

$$\delta = x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p.$$

Тем самым теорема доказана.

Заметим теперь, что $x^* \cos\alpha + y^* \cos\beta + z^* \cos\gamma - p$ есть не что иное, как левая часть нормального уравнения данной плоскости, где вместо текущих координат подставлены координаты точки M^*. Отсюда получаем следующее правило:

Чтобы найти отклонение какой-либо точки M^* от некоторой плоскости, нужно в левую часть нормального уравнения этой плоскости вместо текущих координат подставить координаты точки M^*. Полученное число и будет равно искомому отклонению.

Замечание. Если требуется найти расстояние от точки до плоскости, то достаточно вычислить по только что указанному правилу отклонение и взять его абсолютную величину.

208. Теперь мы покажем, как привести общее уравнение плоскости к нормальному виду. Пусть

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad (7)$$

— общее уравнение некоторой плоскости, а

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0 \qquad (3)$$

— ее нормальное уравнение.

Так как уравнения (7) и (3) определяют одну и ту же плоскость, то согласно n° 202 коэффициенты этих уравнений пропорциональны. Это означает, что, помножив все члены уравнения (7) на некоторый множитель μ, мы получим уравнение

$$\mu Ax+\mu By+\mu Cz+\mu D=0,$$

совпадающее с уравнением (3), т. е. мы будем иметь:

$$\mu A=\cos\alpha, \quad \mu B=\cos\beta, \quad \mu C=\cos\gamma, \quad \mu D=-p. \qquad (8)$$

Чтобы найти множитель μ, возведем первые три из этих равенств в квадрат и сложим; получим:

$$\mu^2(A^2+B^2+C^2)=\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma.$$

Но согласно n° 140 правая часть последнего равенства равна единице. Следовательно,

$$\mu=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (9)$$

Число μ, по умножении на которое общее уравнение плоскости приобретает нормальный вид, называется *нормирующим множителем* этого уравнения. Нормирующий множитель определяется формулой (9), но не вполне: остается неопределенным его знак. Для определения знака нормирующего множителя используем четвертое из равенств (8). Согласно этому равенству $\mu D=-p$, т. е. μD есть число отрицательное. Следовательно:

Знак нормирующего множителя противоположен знаку свободного члена нормируемого уравнения.

Замечание. Если $D=0$, то знак нормирующего множителя можно выбрать по желанию.

Пример. Даны плоскость $3x-4y+12z+14=0$ и точка $M(4; 3; 1)$. Найти отклонение точки M от данной плоскости.

Решение. Чтобы применить правило, изложенное в n° 207, надо прежде всего привести данное уравнение к нормальному виду.

С этой целью находим нормирующий множитель:

$$\mu=\frac{-1}{\sqrt{3^2+4^2+12^2}}=-\frac{1}{13}.$$

Умножая данное уравнение на μ, получим искомое нормальное уравнение плоскости:

$$-\frac{1}{13}(3x-4y+12z+14)=0.$$

Подставляя в левую часть этого уравнения координаты точки M, имеем:

$$\delta=-\frac{1}{13}(3\cdot4-4\cdot3+12\cdot1+14)=-2.$$

Итак, точка M имеет отрицательное отклонение от данной плоскости и удалена от нее на расстояние $d=2$.

§ 66. Уравнения прямой

209. Мы уже указывали в n° 191, что в пространственной аналитической геометрии каждая линия рассматривается как пересечение двух поверхностей и определяется заданием двух уравнений. В частности, каждую прямую линию мы будем рассматривать как пересечение двух плоскостей и соответственно этому определять заданием двух уравнений первой степени (конечно, в декартовых координатах).

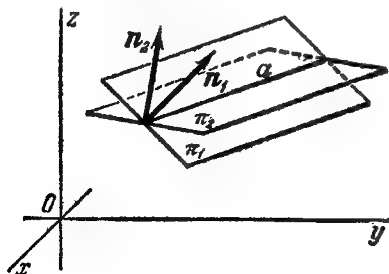


Рис. 104.

Пусть в пространстве установлена некоторая декартова прямоугольная система координат. Рассмотрим произвольную прямую; обозначим ее буквой a (рис. 104). Обозначим через π_1 и π_2 какие-нибудь две различные плоскости, пересекающиеся по прямой a, и предположим, что

уравнения этих плоскостей нам известны; запишем их в виде

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Так как прямая a представляет собой пересечение плоскостей π_1 и π_2, то она определяется совместным заданием двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,\\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

210. Представим себе, что нам заранее даны какие-нибудь два уравнения первой степени (пусть они написаны в виде (1)). Всегда ли они совместно определяют некоторую прямую? Очевидно, это будет в том и только в том случае, когда соответствующие им плоскости не параллельны и не совпадают друг с другом, т. е. когда нормальные векторы этих плоскостей $\boldsymbol{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ не коллинеарны. Вспомнив, что условием коллинеарности двух векторов является пропорциональность их координат (см. n° 154), заключаем:

Два уравнения вида (1) *совместно определяют прямую в том и только в том случае, когда коэффициенты A_1, B_1, C_1 одного из них не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2 другого.*

211. Через каждую прямую проходит бесконечно много различных плоскостей; ясно, что существует бесконечно много возможностей выбрать из них какие-нибудь две. Отсюда следует, что всякую прямую можно определять двумя уравнениями бесконечно многими различными способами. Мы укажем сейчас весьма простой прием, который позволяет, *зная уравнения двух плоскостей, проходящих через данную прямую, «скомбинировать» из них сколько угодно новых уравнений, каждое из которых определяет плоскость, также проходящую через данную прямую.*

Пусть даны некоторая прямая a и уравнения двух различных плоскостей π_1 и π_2, проходящих через эту прямую:

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \text{ и } A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0.$$

Возьмем какие-нибудь два числа α, β, не равные одновременно нулю, и составим равенство

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0, \quad (2)$$

или, в иной записи:

$$(\alpha A_1+\beta A_2)x+(\alpha B_1+\beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2)z+ \\ +(\alpha D_1+\beta D_2)=0. \qquad (3)$$

Легко убедиться в том, что все три числа $\alpha A_1+\beta A_2$, $\alpha B_1+\beta B_2$ и $\alpha C_1+\beta C_2$ не могут быть одновременно равными нулю. Действительно, если $\alpha A_1+\beta A_2=0$, $\alpha B_1+\beta B_2=0$, $\alpha C_1+\beta C_2=0$, то

$$\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{B_1}{B_2}=-\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{C_1}{C_2}=-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Так как числа α и β не равны нулю одновременно, то отношение $\frac{\beta}{\alpha}$ не может быть неопределенным; поэтому из предыдущих пропорций следует, что A_1, B_1, C_1 пропорциональны A_2, B_2, C_2, т. е. что нормальные векторы заданных плоскостей $\boldsymbol{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ коллинеарны; но это невозможно, так как заданные плоскости не параллельны и не совпадают друг с другом.

Поскольку все три числа $\alpha A_1+\beta A_2$, $\alpha B_1+\beta B_2$ и $\alpha C_1+\beta C_2$ не могут одновременно исчезнуть, равенство (3) есть уравнение. Ясно, что это — уравнение первой степени; значит, оно определяет некоторую плоскость.

Далее, так как уравнение (3) является следствием уравнений $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, то каждая тройка чисел $(x;\ y;\ z)$, удовлетворяющая этим двум уравнениям, удовлетворяет также и уравнению (3). Отсюда следует, что каждая точка, лежащая на пересечении плоскостей π_1 и π_2, лежит также на плоскости, которая определяется уравнением (3). Иначе говоря, уравнение (3) (или равносильное ему уравнение (2)) определяет плоскость, проходящую через прямую a.

Итак, *если*

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \ \textit{и}\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

— уравнения двух плоскостей, проходящих через некоторую прямую, то уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \qquad (2)$$

определяет плоскость, которая проходит через ту же прямую.

Пользуясь этим предложением, можно упрощать уравнения прямой. Например, уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} x+y+z+3=0, \\ x+y-z-5=0 \end{aligned}\right\}$$

можно заменить более простыми, если скомбинировать их, беря сначала $\alpha=1$, $\beta=1$, а потом $\alpha=1$, $\beta=-1$; именно, мы получим таким путем уравнения

$$\left.\begin{aligned} x+y-1=0, \\ z+4=0, \end{aligned}\right\}$$

которые определяют ту же прямую, что и первоначально данные.

212. Пусть некоторая прямая a определена уравнениями

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{aligned}\right\}$$

как пересечение двух плоскостей π_1 и π_2. Мы знаем, что уравнение

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (2)$$

при любых численных значениях α, β (не равных одновременно нулю) определяет плоскость, проходящую через прямую a. Докажем, что значения α, β всегда можно подобрать так, чтобы уравнение (2) определило любую заранее назначенную плоскость, проходящую через прямую a.

Так как каждая плоскость, проходящая через прямую a, определяется заданием, кроме прямой a, еще одной своей точки, то для доказательства высказанного утверждения достаточно показать, что в уравнении (2) числа α, β всегда возможно подобрать так, чтобы определяемая им плоскость прошла через любую заранее назначенную точку $M^*(x^*; y^*; z^*)$.

Но это ясно; в самом деле, плоскость, определяемая уравнением (2), будет проходить через точку M^*, если координаты точки M^* удовлетворяют этому уравнению, т. е. если

$$\alpha(A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1)+ \\ +\beta(A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2)=0. \quad (4)$$

Будем считать, что точка M^* не лежит на прямой a (только этот случай нам и нужен). Тогда хотя бы одно из

чисел $A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1$, $A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2$ не равно нулю, следовательно, равенство (4) является уравнением первой степени с двумя неизвестными α, β. Чтобы найти неизвестные α, β, нужно одной из них придать численное значение произвольно, а другую вычислить из этого уравнения; например, если $A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2\neq 0$, то α можно взять каким угодно (не равным нулю), а β соответственно определить равенством:

$$\beta=-\frac{A_1x^*+B_1y^*+C_1z^*+D_1}{A_2x^*+B_2y^*+C_2z^*+D_2}\,\alpha.$$

Итак, уравнением вида (2) можно определить плоскость, проходящую через какую угодно заранее назначенную точку пространства, а значит, любую плоскость, проходящую через данную прямую a.

213. *Совокупность всех плоскостей, проходящих через одну и ту же прямую, называется пучком плоскостей. Уравнение вида* (2) *называется уравнением пучка плоскостей*, поскольку оно при соответствующих значениях α, β определяет все плоскости некоторого пучка.

Если $\alpha\neq 0$, то, полагая $\frac{\beta}{\alpha}=\lambda$, получим из уравнения (2)

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0. \quad (5)$$

В таком виде написанное уравнение пучка плоскостей в практике решения задач более употребительно, чем уравнение (2). Существенно, однако, заметить, что так как при переходе от уравнения (2) к уравнению (5) исключается случай $\alpha=0$, то уравнением вида (5) нельзя определить плоскость $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, т. е. уравнение вида (5) при различных λ определяет все плоскости пучка, кроме одной (кроме второй из двух данных).

§ 67. Направляющий вектор прямой. Канонические уравнения прямой. Параметрические уравнения прямой

214. В целях удобства решения ряда задач в аналитической геометрии используется некоторый специальный вид уравнений прямой, который сейчас будет указан. Этот специальный вид уравнений прямой можно получить из общих

ее уравнений путем алгебраических преобразований; однако мы предпочтем установить его непосредственно; тем самым будет отчетливо выявлена геометрическая суть дела.

Пусть дана какая-нибудь прямая. *Каждый не равный нулю вектор, лежащий на данной прямой или параллельный ей, называется направляющим вектором этой прямой.* Указанные векторы называются направляющими потому именно, что любой из них, будучи задан, определяет направление прямой.

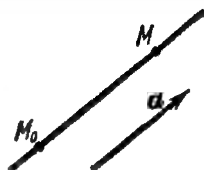


Рис. 105.

Направляющий вектор произвольной прямой мы будем обозначать буквой $\boldsymbol{a}$, его координаты — буквами l, m, n:

$$\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

Мы выведем сейчас *уравнение прямой, проходящей через данную точку* $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ *и имеющей данный направляющий вектор* $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$.

Эти уравнения получаются весьма просто. Пусть $M(x;\ y;\ z)$ — произвольная («текущая») точка прямой (рис. 105). Вектор

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;\ y-y_0;\ z-z_0\}$$

коллинеарен направляющему вектору

$$\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}.$$

Следовательно, координаты вектора $\overline{M_0M}$ пропорциональны координатам вектора $\boldsymbol{a}$:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (1)$$

Этим соотношениям, как мы видим, удовлетворяют координаты каждой точки $M(x;\ y;\ z)$, лежащей на рассматриваемой прямой; напротив, если точка $M(x;\ y;\ z)$ не лежит на этой прямой, то ее координаты не удовлетворяют соотношениям (1), так как в этом случае векторы $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{a}$ не коллинеарны и координаты их не пропорциональны. Таким образом, уравнения (1) представляют собой уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ в направлении вектора $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$.

Уравнения прямой полученного сейчас специального вида мы будем называть *каноническими*.

Координаты l, m, n любого направляющего вектора $\boldsymbol{a}$ прямой называются *направляющими параметрами* этой прямой. Направляющие косинусы вектора $\boldsymbol{a}$ называются *направляющими косинусами* той же прямой.

215. Пусть некоторая прямая задана двумя общими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Покажем, как составить канонические уравнения этой прямой.

Обозначим плоскости, определяемые данными уравнениями, через π_1 и π_2, нормальные векторы этих плоскостей через $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$. Чтобы составить канонические уравнения данной прямой, нужно:

1) найти какую-нибудь ее точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$; для этого следует задать численное значение одной из неизвестных координат x_0, y_0, z_0 и подставить его вместо соответствующей переменной в уравнения (2); после этого две другие координаты определятся из уравнений (2) путем их совместного решения;

2) найти направляющий вектор $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$. Так как данная прямая определена пересечением плоскостей π_1 и π_2, то она перпендикулярна к каждому из векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ (см. рис. 104). Поэтому в качестве вектора $\boldsymbol{a}$ можно взять любой вектор, перпендикулярный к векторам $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, например, их векторное произведение: $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]$. Поскольку координаты векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ известны: $\boldsymbol{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$, для вычисления координат вектора $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$ достаточно применить теорему 21 (n° 173).

Пример. Найти канонические уравнения прямой

$$\left.\begin{aligned} 3x+2y+4z-11=0, \\ 2x+y-3z-1=0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Полагая, например, $x_0=1$, находим из данной системы: $y_0=2$, $z_0=1$; таким образом, мы уже знаем одну точку прямой: $M_0(1;\ 2;\ 1)$. Теперь найдем направляющий вектор. Имеем: $\boldsymbol{n}_1=\{3;\ 2;\ 4\}$, $\boldsymbol{n}_2=\{2;\ 1;\ -3\}$; отсюда $\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2]=\{-10;\ 17;\ -1\}$, т. е. $l=-10$, $m=17$, $n=-1$. Канонические уравнения данной пря-

мой мы получим, подставляя найденные значения x_0, y_0, z_0 и l, m, n в равенства (1):

$$\frac{x-1}{-10}=\frac{y-2}{17}=\frac{z-1}{-1}.$$

216. Пусть даны канонические уравнения какой-нибудь прямой. Обозначим буквой t каждое из равных отношений, которые участвуют в этих канонических уравнениях; мы получим:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}=t.$$

Отсюда

$$\left.\begin{aligned} x&=x_0+lt,\\ y&=y_0+mt,\\ z&=z_0+nt. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Это — *параметрические уравнения прямой, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *в направлении вектора* $\mathbf{a}=\{l; m; n\}$. В уравнениях (3) t рассматривается как произвольно изменяющийся параметр, x, y, z — как функции от t; при изменении t величины x, y, z меняются так, что точка $M(x; y; z)$ движется по данной прямой. Параметрические уравнения прямой удобно применять в тех случаях, когда требуется найти точку пересечения прямой с плоскостью.

Пример. Даны прямая

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}$$

и плоскость $2x+y+z-6=0$. Найти точку их пересечения.

Решение. Дело сводится к тому, чтобы определить x, y, z из трех данных уравнений (мы имеем два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Необходимые вычисления будут более простыми, если повысить число неизвестных (и число уравнений) до четырех, полагая $\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{2}=t$; отсюда

$$x=2+t, \quad y=3+t, \quad z=4+2t.$$

Подставляя эти выражения в левую часть уравнения данной плоскости, мы сразу приходим к одному уравнению с одним неизвестным:

$$2(2+t)+(3+t)+(4+2t)-6=0.$$

Решая это уравнение, находим: $t=-1$, следовательно, координаты искомой точки суть $x=1$, $y=2$, $z=2$.

217. Условимся считать, что t есть число секунд, прошедших от некоторого условного момента времени («момент пуска секундомера»), а уравнения (3) будем рассматривать как уравнения движения точки $M(x; y; z)$ (см. n°45). Постараемся уяснить себе характер этого движения.

Прежде всего, из предыдущего ясно, что движение точки M является прямолинейным, причем совершается оно по прямой, которая проходит через точку M_0 в направлении вектора $\boldsymbol{a}=\{l; m; n\}$.

Далее, легко убедиться в том, что движение точки M, определяемое уравнениями (3), есть движение равномерное. В самом деле, согласно уравнениям (3) имеем:

$$x-x_0=lt, \quad y-y_0=mt, \quad z-z_0=nt.$$

Последние три равенства равносильны одному векторному уравнению:

$$\overline{M_0M}=\boldsymbol{a}t.$$

Отсюда видно, что за время t секунд точка M проходит путь $\overline{M_0M}$, равный вектору $\boldsymbol{a}$, удлиненному в «t раз». Таким образом, путь, проходимый точкой M, пропорционален времени t, а это и означает, что движение точки M равномерно.

Подсчитаем, наконец, скорость движения точки M. С этой целью заметим, что за первую секунду (от $t=0$ до $t=1$) точка M проходит путь $\overline{M_0M}=\boldsymbol{a}$. Следовательно, скорость v движения точки M численно равна модулю вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$. Итак, *уравнения* (3) *определяют прямолинейное и равномерное движение точки* $M(x; y; z)$ *со скоростью* $v=\sqrt{l^2+m^2+n^2}$ *в направлении вектора* $\boldsymbol{a}=\{l; m; n\}$; точка $M_0(x_0; y_0; z_0)$ является начальным положением переменной точки $M(x; y; z)$ (т. е. при $t=0$ точка M совпадает с точкой M_0).

Пример. Составить уравнения движения точки $M(x; y; z)$, которая, имея начальное положение $M_0(1; 1; 1)$, движется прямолинейно и равномерно в направлении вектора $\boldsymbol{s}=\{2; 3; 6\}$ со скоростью $v=21$.

Решение. Сравнивая модуль вектора $\boldsymbol{s}$, который равен $\sqrt{2^2+3^2+6^2}=7$, с заданной скоростью $v=21$, мы видим, что в качестве вектора $\boldsymbol{a}$ нам нужно взять вектор $\boldsymbol{s}$, удлиненный в три раза, т. е. $\boldsymbol{a}=\{6; 9; 18\}$. Искомые уравнения суть

$$x=1+6t, \quad y=1+9t, \quad z=1+18t.$$

§ 68. Некоторые дополнительные предложения и примеры

218. В аналитической геометрии часто требуется составить уравнения прямой, зная две ее точки. Мы решим сейчас эту задачу в общем виде, считая данными две произвольные точки:

$$M_1(x_1;\ y_1;\ z_1) \text{ и } M_2(x_2;\ y_2;\ z_2).$$

Для решения задачи достаточно заметить, что в качестве направляющего вектора рассматриваемой прямой можно взять вектор $\boldsymbol{a} = \overline{M_1M_2}$; отсюда

$$l = x_2 - x_1, \quad m = y_2 - y_1, \quad n = z_2 - z_1.$$

Назначая точке $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ ту же роль, какую играет в n° 215 точка M_0, получим:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Это и есть искомые (канонические) *уравнения прямой, проходящей через две данные точки:* $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.

219. Решим также в общем виде следующую задачу: составить уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $M_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$.

Обозначим через x, y, z координаты произвольной точки M пространства и рассмотрим три вектора: $\overline{M_1M} = \{x - x_1;\ y - y_1;\ z - z_1\}$, $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1\}$ и $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1;\ y_3 - y_1;\ z_3 - z_1\}$. Точка M лежит на плоскости $M_1M_2M_3$ в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ компланарны; согласно n° 185 условием компланарности этих трех векторов является равенство нулю определителя третьего порядка, составленного из их координат. В данном случае имеем:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Это и есть искомое *уравнение плоскости, проходящей через точки* M_1, M_2, M_3, так как ему удовлетворяют координаты x, y, z точки M в том и только в том случае, когда она лежит в этой плоскости.

220. В ряде задач аналитической геометрии требуется знать *условия параллельности и перпендикулярности* двух плоскостей, двух прямых, а также прямой и плоскости. Выведем эти условия.

1) Пусть даны две плоскости

$$\left.\begin{array}{l} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \end{array}\right\}$$

Данные плоскости параллельны в том и только в том случае, когда их нормальные векторы $\mathbf{n}_1=\{A_1;\ B_1;\ C_1\}$,

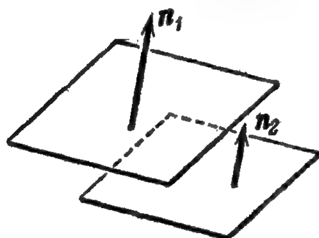


Рис. 106.

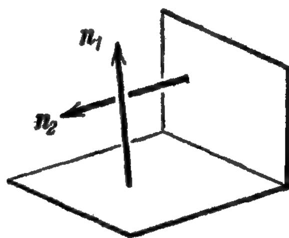


Рис. 107.

$\mathbf{n}_2=\{A_2;\ B_2;\ C_2\}$ коллинеарны (рис. 106; совпадение плоскостей мы рассматриваем сейчас как особый случай параллельности). Отсюда и согласно n° 154 получаем *условие параллельности двух плоскостей*:

$$\frac{A_2}{A_1}=\frac{B_2}{B_1}=\frac{C_2}{C_1}.$$

Данные плоскости перпендикулярны в том и только в том случае, когда их нормальные векторы перпендикулярны (рис. 107). Отсюда и согласно n° 165 получаем *условие перпендикулярности двух плоскостей*:

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0.$$

2) Пусть даны две прямые

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1},$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}.$$

Данные прямые параллельны в том и только в том случае, когда их направляющие векторы $\boldsymbol{a}_1=\{l_1,\ m_1,\ n_1\}$, $\boldsymbol{a}_2=\{l_2,\ m_2,\ n_2\}$ коллинеарны (рис. 108; совпадение прямых мы рассматриваем сейчас как особый случай параллельности). Отсюда получаем *условие параллельности двух прямых*:

$$\frac{l_2}{l_1}=\frac{m_2}{m_1}=\frac{n_2}{n_1}.$$

Данные прямые перпендикулярны в том и только в том случае, когда их направляющие векторы перпендикулярны

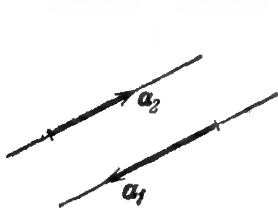


Рис. 108.

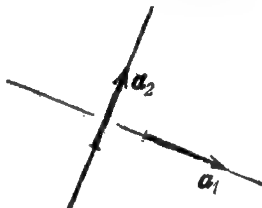


Рис. 109.

(рис. 109; в пространстве перпендикулярные прямые могут быть и не пересекающимися). Отсюда получаем *условие перпендикулярности двух прямых*:

$$l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0.$$

3) Пусть даны прямая

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

и плоскость

$$Ax+By+Cz+D=0.$$

Прямая параллельна плоскости в том и только в том случае, когда направляющий вектор этой прямой $\boldsymbol{a}=\{l;\ m;\ n\}$ перпендикулярен к нормальному вектору плоскости $\boldsymbol{n}=\{A;B;C\}$

(рис. 110; случай, когда прямая лежит в плоскости, мы рассматриваем как особый случай параллельности). Отсюда получаем *условие параллельности прямой и плоскости:*

$$Al + Bm + Cn = 0.$$

Прямая перпендикулярна к плоскости в том и только в том случае, когда направляющий вектор этой прямой коллинеарен

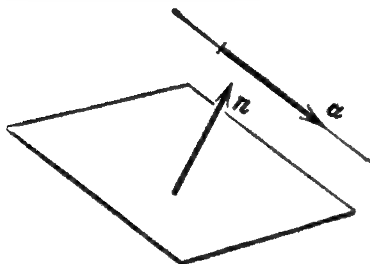


Рис. 110.

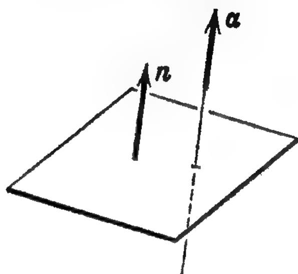


Рис. 111.

нормальному вектору плоскости (рис. 111). Отсюда получаем *условие перпендикулярности прямой и плоскости:*

$$\frac{A}{l} = \frac{B}{m} = \frac{C}{n}.$$

Далее приводится ряд примеров с числовыми данными.

221. Пример 1. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y + 5z + 6 = 0, \\ x + 4y + 3z + 4 = 0 \end{aligned}\right\}$$

параллельно прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{-3}.$$

Решение. Составим уравнение пучка плоскостей (см. n°n° 212, 213), проходящих через первую из данных прямых:

$$3x + 2y + 5z + 6 + \lambda(x + 4y + 3z + 4) = 0. \qquad (1)$$

В этом пучке мы должны выбрать плоскость, параллельную второй данной прямой; дело сводится к тому, чтобы найти надлежащее численное значение λ. Представим уравнение (1) в виде

$$(3 + \lambda)x + (2 + 4\lambda)y + (5 + 3\lambda)z + (6 + 4\lambda) = 0. \qquad (2)$$

Искомая плоскость должна быть параллельна прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+1}{-3}.$$

Используя условие параллельности прямой и плоскости, получаем для неизвестной величины λ уравнение

$$3(3+\lambda)+2(2+4\lambda)-3(5+3\lambda)=0.$$

Отсюда $\lambda=1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (2), найдем: $4x+6y+8z+10=0$ или $2x+3y+4z+5=0$.

Пример 2. Дана прямая

$$\left.\begin{array}{l}3x-2y-z+4=0,\\ x-4y-3z-2=0.\end{array}\right\}$$

Найти ее проекцию на плоскость $5x+2y+2z-7=0$.

Решение. Нам следует найти плоскость, которая проходит через данную прямую перпендикулярно к данной плоскости; тогда искомая проекция определится как пересечение этой плоскости с данной. Составим уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую:

$$3x-2y-z+4+\lambda(x-4y-3z-2)=0. \tag{3}$$

Искомая плоскость определится этим уравнением при некотором значении λ; его мы должны найти. Представим уравнение (3) в виде

$$(3+\lambda)x+(-2-4\lambda)y+(-1-3\lambda)z+(4-2\lambda)=0. \tag{4}$$

Искомая плоскость должна быть перпендикулярна к данной. Используя условие перпендикулярности двух плоскостей, получаем для неизвестной величины λ уравнение:

$$5(3+\lambda)+2(-2-4\lambda)+2(-1-3\lambda)=0.$$

Отсюда $\lambda=1$. Подставляя найденное значение λ в уравнение (4), найдем уравнение плоскости, проходящей через данную прямую перпендикулярно к данной плоскости: $4x-6y-4z+2=0$ или $2x-3y-2z+1=0$. Проекция данной прямой на данную плоскость определяется уравнениями

$$\left.\begin{array}{l}2x-3y-2z+1=0,\\ 5x+2y+2z-7=0.\end{array}\right\}$$

Пример 3. Найти расстояние от точки $P(1;\ 1;\ 1)$ до прямой

$$\frac{x-11}{2}=\frac{y-18}{5}=\frac{z-4}{-2}.$$

Решение. Проведем через P плоскость α, перпендикулярную к данной прямой, и найдем точку Q, где эта плоскость пересекает данную прямую. Искомое расстояние от точки P до данной прямой будет равно расстоянию от точки P до точки Q.

Согласно n° 199 уравнение плоскости α можно написать в виде

$$A(x-1)+B(y-1)+C(z-1)=0;$$

эта плоскость должна быть перпендикулярна к данной прямой. По условию перпендикулярности прямой и плоскости имеем:

$$\frac{A}{2}=\frac{B}{5}=\frac{C}{-2};$$

выбирая здесь множитель пропорциональности для простоты равным единице, находим $A=2$, $B=5$, $C=-2$. Итак, плоскость имеет уравнение $2(x-1)+5(y-1)-2(z-1)=0$, или $2x+5y-2z-5=0$. Теперь мы должны найти точку Q, в которой эта плоскость пересекается с данной прямой. Для этого нужно уравнения данной прямой решить совместно с найденным уравнением плоскости α. Поступая так, как было показано в n° 216 (см. пример в конце этого n°), найдем координаты точки Q: $x=5$, $y=3$, $z=10$. Искомое расстояние d от точки P до данной прямой, равное расстоянию между точками P и Q, найдется по известной формуле

$$d=\sqrt{(5-1)^2+(3-1)^2+(10-1)^2}=\sqrt{101}\approx 10.$$

ГЛАВА 13

ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 69. Эллипсоид и гиперболоиды

222. Согласно изложенному в n° 196, поверхности второго порядка суть те, которые в декартовых координатах определяются уравнением второй степени. В этой главе будут рассмотрены различные представители класса поверхностей второго порядка. Прежде всего мы рассмотрим эллипсоид и два гиперболоида; эти поверхности являются пространственными аналогами эллипсов и гипербол на плоскости.

223. *Эллипсоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением эллипсоида*.

Постараемся уяснить себе форму эллипсоида и изобразить его на чертеже. С этой целью мы употребим так называемый «метод параллельных сечений».

Рассмотрим сечения данного эллипсоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z=h$, а линия, которая получается в сечении, определяется двумя уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1-\frac{h^2}{c^2},\\ z&=h.\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Отсюда видно, что 1) при условии $|h|<c$ плоскость $z=h$

пересекает эллипсоид по эллипсу с полуосями

$$a^* = a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

$$b^* = b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}},$$

расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz; 2) величины a^* и b^* имеют наибольшие значения при $h=0$ (тогда $a^*=a$, $b^*=b$); иначе говоря, самый крупный эллипс образуется в сечении координатной плоскостью $z=0$; 3) при возрастании $|h|$ величины a^* и b^* убывают; 4) при $h=\pm c$ величины a^* и b^* обращаются в нуль, т. е. эллипс, образуемый сечением эллипсоида (1) плоскостью $z=c$ или плоскостью $z=-c$, вырождается в точку; иначе говоря, плоскости $z=\pm c$ касаются эллипсоида; 5) при $|h|>c$ уравнения (2) определяют мнимый эллипс; это означает, что плоскость $z=h$ при $|h|>c$ с данным эллипсоидом не встречается совсем.

Совершенно аналогичная картина выявляется при рассмотрении сечений эллипсоида плоскостями, параллельными

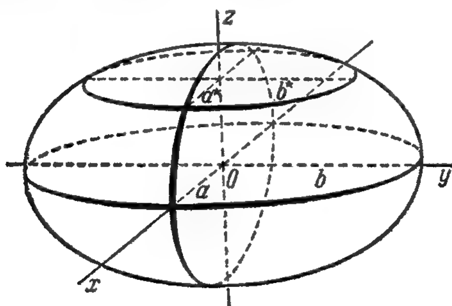


Рис. 112.

координатным плоскостям Oxz и Oyz. Отметим только, что сама плоскость Oxz пересекает эллипсоид по эллипсу, который определяется уравнениями $\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и $y=0$, плоскость Oyz — по эллипсу, который определяется уравнениями $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ и $x=0$ (см. рис. 112, где показаны сечения эллипсоида (1) плоскостями Oxy, Oxz и $z=h$).

Сопоставляя изложенное, мы можем заключить, что эллипсоид есть замкнутая овальная поверхность, обладающая тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии. При данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с плоскостями координат.

224. Величины a, b, c называются *полуосями* эллипсоида. Если все они различны, эллипсоид называется *трехосным*. Рассмотрим случай, когда какие-либо две из величин a, b, c одинаковы. Пусть, например, $a = b$. Тогда уравнения (6) определяют окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $a = b$ эллипсоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением эллипса вокруг одной из его осей. Если эллипсоид образован вращением эллипса вокруг его большой оси, он называется *вытянутым эллипсоидом вращения*; эллипсоид, образованный вращением эллипса вокруг меньшей оси, называется *сжатым эллипсоидом вращения*. В случае $a = b = c$ эллипсоид является сферой.

225. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (3)$$

Левая часть его содержит такое же выражение, что стоит слева в каноническом уравнении эллипсоида. Так как это выражение $\geqslant 0$, а справа в уравнении (3) стоит -1, то уравнение (3) не определяет никакого действительного образа. Уравнение (3) ввиду аналогии с уравнением (1) называют уравнением *мнимого эллипсоида*.

226. Теперь мы займемся гиперболоидами. Существуют два гиперболоида: однополостный и двухполостный.

Однополостным гиперболоидом называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1. \qquad (4)$$

Двухполостным гиперболоидом называется поверхность, определяемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1. \qquad (5)$$

Уравнения (4) и (5) называются каноническими уравнениями гиперболоидов.

227. В этом пункте мы будем исследовать *однополостный гиперболоид*,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Рассмотрим сечения его координатными плоскостями Oxz и Oyz. Сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0.\end{aligned}\right\}$$

Мы видим, что оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно координатных осей Ox, Oz и пересекающую ось Ox (в точках $(a;\ 0;\ 0)$ и $(-a;\ 0;\ 0)$). Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0.\end{aligned}\right\}$$

Оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно осей Oy, Oz и пересекающую ось Oy (в точках $(0;\ b;\ 0)$ и $(0;\ -b;\ 0)$).

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z=h$, а сечение гиперболоида этой плоскостью определяется уравнениями:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2},\\ z=h.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Отсюда видно, что 1) любая полуплоскость $z=h$ пересекает гиперболоид (4) по эллипсу с полуосями

$$a^*=a\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},\quad b^*=b\sqrt{1+\frac{h^2}{c^2}},$$

расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz; 2) величины a^* и b^* имеют наименьшие значения при $h=0$ (тогда $a^*=a$, $b^*=b$); иначе говоря, самых малых

размеров эллипс образуется в сечении координатной плоскостью $z=0$ (он называется *горловым* эллипсом однополостного гиперболоида); 3) при бесконечном возрастании $|h|$ величины a^* и b^* бесконечно возрастают (рис. 113).

Сопоставляя изложенное, можем заключить, что однополостный гиперболоид имеет вид бесконечной трубки, бесконечно расширяющейся в обе стороны от горлового эллипса. Однополостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с плоскостями координат.

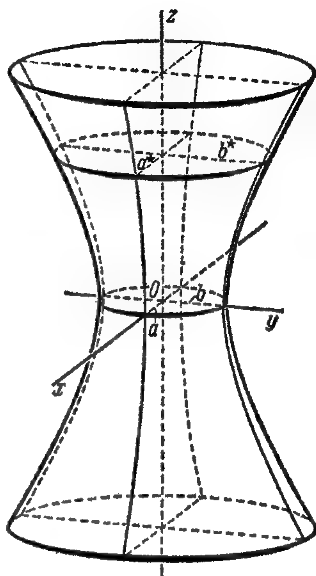


Рис. 113.

228. Величины a, b, c называются *полуосями* однополостного гиперболоида. Первые две из них (a и b) изображены на рис. 113. Чтобы изобразить на чертеже полуось c, нужно было бы построить основной прямоугольник какой-нибудь из гипербол, определяемых сечением однополостного гиперболоида плоскостями Oxz и Oyz.

Заметим, что в случае $a=b$ уравнения (6) определяют окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $a=b$ однополостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из осей, а именно той, которая гиперболу не пересекает.

229. Здесь мы исследуем *двухполостный гиперболоид*

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Рассмотрим сечения его координатными плоскостями Oxz и Oyz. Сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Мы видим, что оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно координатных осей Ox, Oz и пересекающую ось Oz (в точках $(0;\ 0;\ c)$ и $(0;\ 0;\ -c)$). Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}&=-1,\\ x&=0. \end{aligned}\right\}$$

Оно представляет собой гиперболу, расположенную симметрично относительно осей Oy, Oz и пересекающую ось Oz (также в точках $(0;\ 0;\ c)$ и $(0;\ 0;\ -c)$).

Теперь рассмотрим сечения данного гиперболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z=h$, а сечение гиперболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z&=h. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

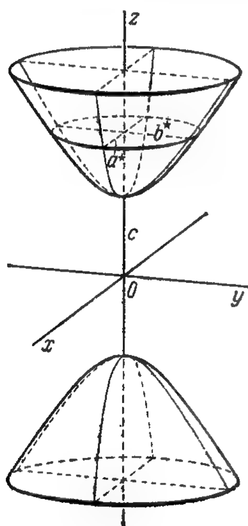


Рис. 114.

Отсюда видно, что 1) при условии $|h|>c$ плоскость $z=c$ пересекает двухполостный гиперболоид по эллипсу с полуосями

$$a^*=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\quad b^*=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},$$

расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz; 2) при возрастании $|h|$ величины a^* и b^* возрастают; 3) если $|h|$ возрастает бесконечно, то a^* и b^* возрастают также бесконечно; 4) если $|h|$, убывая, приближается к c, то a^* и b^* также убывают и приближаются к нулю; при $h=\pm c$ имеем: $a^*=0$, $b^*=0$; это означает, что эллипс, образуемый сечением плоскостью $z=c$ или плоскостью $z=-c$, вырождается в точку, иначе говоря, плоскости $z=\pm c$ касаются гиперболоида; 5) при $|h|<c$ уравнения (7) определяют мнимый эллипс; это означает, что плоскость $z=h$ при $|h|<c$ с данным гиперболоидом не встречается совсем (рис. 114).

Сопоставляя изложенное, можем заключить, что двухполостный гиперболоид есть поверхность, состоящая из двух отдельных «полостей» (отсюда его название — «двухполостный»); каждая из них имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Двухполостный гиперболоид обладает тремя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с плоскостями координат.

230. Величины a, b, c называются *полуосями* двухполостного гиперболоида. На черт. 114 изображена только величина c. Чтобы изобразить на чертеже a и b, нужно было бы построить основные прямоугольники гипербол, определяемых сечением двухполостного гиперболоида плоскостями Oxz и Oyz.

Заметим, что в случае $a=b$ уравнения (7) определяют окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $a=b$ двухполостный гиперболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением гиперболы вокруг одной из осей, а именно, той, которая гиперболу пересекает.

§ 70. Конус второго порядка

231. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (1)$$

Особенностью уравнения (1) является то, что оно *однородно*, т. е. все его члены имеют одну и ту же степень ($=2$). Отсюда проистекает следующая геометрическая особенность определяемой им поверхности.

Если некоторая точка M (отличная от начала координат) лежит на этой поверхности, то все точки прямой, которая проходит через начало координат и точку M, также лежат на этой поверхности.

Докажем наше утверждение. Пусть M — точка с координатами (l; m; n), N — какая угодно точка прямой OM. Согласно n° 216 координаты x, y, z точки N определяются равенствами

$$x=lt, \quad y=mt, \quad z=nt,$$

где t — некоторое число. Предположим, что точка M лежит

на рассматриваемой поверхности; тогда

$$\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}=0.$$

Но в таком случае

$$\frac{(lt)^2}{a^2}+\frac{(mt)^2}{b^2}-\frac{(nt)^2}{c^2}=t^2\left(\frac{l^2}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}-\frac{n^2}{c^2}\right)=0,$$

следовательно, точка N также лежит на этой поверхности. Утверждение доказано.

Заметим, что тем же самым свойством обладает каждая поверхность, которая в декартовых координатах определяется однородным уравнением (поскольку в проведенном сейчас рассуждении мы ничем, кроме однородности данного уравнения, не пользовались). Иначе говоря, поверхность, определяемая однородным уравнением, состоит из прямых, проходящих через одну точку, именно — через начало координат. Такая поверхность называется *конической*, или просто *конусом*. Прямые, из которых составлен конус, называются его *образующими*, точка, через которую все они проходят, называется *вершиной* конуса.

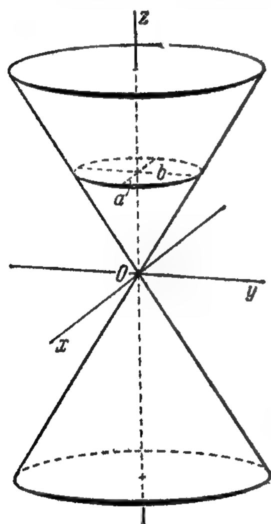


Рис. 115.

В частности, *поверхность, которая в некоторой системе декартовых координат определяется уравнением вида* (1), *называется конусом второго порядка.*

Чтобы уяснить себе форму конуса второго порядка, достаточно рассмотреть его сечение какой-нибудь плоскостью, не проходящей через начало координат (т. е. не проходящей через вершину). Возьмем, например, плоскость $z=c$. Сечение конуса этой плоскостью определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}&=1,\\ z&=c.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Очевидно, оно представляет собой эллипс с полуосями a, b, расположенный симметрично относительно координатных плоскостей Oxz и Oyz.

В согласии с этим обстоятельством исполнен рис. 115, где дано изображение конуса второго порядка.

Заметим, что если $a=b$, то эллипс, определяемый уравнениями (2), есть окружность с центром на оси Oz, и, следовательно, конус оказывается *круглым*.

232. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0. \tag{3}$$

Это уравнение определяет единственную действительную точку: $x=0$, $y=0$, $z=0$. Однако ввиду аналогии с уравнением (1) его часто называют уравнением *мнимого конуса*.

§ 71. Параболоиды

233. Существуют две поверхности, которые являются пространственными аналогами парабол на плоскости. Их называют *параболоидами* (эллиптическим и гиперболическим).

234. *Эллиптическим параболоидом* называется поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением

$$2z=\frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q} \tag{1}$$

(при положительных p и q). Уравнение (1) называется каноническим уравнением эллиптического параболоида. Исследуем эту поверхность методом сечений.

Прежде всего рассмотрим сечения координатными плоскостями Oxz и Oyz. При $y=0$ из уравнения (1) имеем: $x^2=2pz$; таким образом, сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz,\\ y&=0.\end{aligned}\right\}$$

Мы видим, что оно представляет собой восходящую параболу, симметричную относительно оси Oz, с вершиной в начале координат; параметр этой параболы равен p.

Сечение плоскостью Oyz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} y^2 &= 2qz, \\ x &= 0 \end{aligned}\right\}$$

и представляет собой аналогичным образом расположенную параболу с параметром q.

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $z = h$, а сечение параболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} &= 2h, \\ z &= h. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Отсюда видно, что 1) при $h > 0$ плоскость $z = h$ пересекает эллиптический параболоид по эллипсу с полуосями $a^* = \sqrt{2hp}$, $b^* = \sqrt{2hq}$, расположенному симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz; 2) при возрастании h величины a^* и b^* возрастают; 3) если h возрастает бесконечно, то a^* и b^* возрастают также бесконечно; 4) если h, убывая, приближается к нулю, то a^* и b^* убывают и также приближаются к нулю; при $h = 0$ имеем $a^* = 0$, $b^* = 0$; это означает, что эллипс, образуемый сечением параболоида (1) плоскостью $z = 0$, вырождается в точку; иначе говоря, плоскость $z = 0$ касается данного эллиптического параболоида; 5) при $h < 0$ уравнения (2) определяют мнимый эллипс; это означает, что плоскость $z = h$ при $h < 0$ с данным параболоидом не встречается совсем (рис. 116).

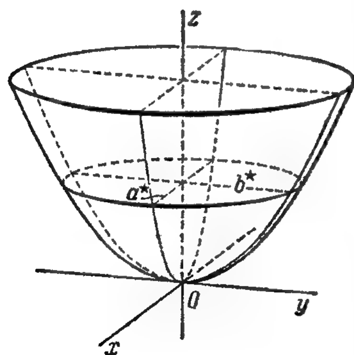


Рис. 116.

Сопоставляя изложенное, можем заключить, что эллиптический параболоид имеет вид бесконечной выпуклой чаши. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями

симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с координатными плоскостями Oxz и Oyz. Точка, с которой совмещено начало координат, называется *вершиной* эллиптического параболоида; числа p и q называются его *параметрами.*

Заметим, что в случае $p=q$ уравнения (2) определяют окружность с центром на оси Oz. Отсюда следует, что при $p=q$ эллиптический параболоид можно рассматривать как поверхность, образованную вращением параболы вокруг ее оси.

235. *Поверхность, которая в некоторой системе декартовых прямоугольных координат определяется уравнением вида*

$$2z=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q} \tag{3}$$

(при положительных p и q), называется гиперболическим параболоидом. Займемся исследованием этой поверхности.

Рассмотрим сечение гиперболического параболоида плоскостью Oxz. При $y=0$ из уравнения (3) имеем $x^2=2pz$; таким образом, сечение плоскостью Oxz определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} x^2&=2pz,\\ y&=0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Мы видим, что оно представляет собой восходящую параболу, симметричную относительно оси Oz, с вершиной в начале координат; параметр этой параболы равен p.

Теперь рассмотрим сечения данного параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oyz. Каждая из таких плоскостей определяется уравнением вида $x=h$, а сечение параболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} 2z&=-\frac{y^2}{q}+\frac{h^2}{p},\\ x&=h. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Отсюда видно, что при любом h плоскость $x=h$ пересекает гиперболический параболоид по нисходящей параболе, расположенной симметрично относительно плоскости Oxz (см. n° 120). Все эти параболы, как показывает первое из

уравнений (5), имеют общий параметр, равный q; вершина каждой из них лежит на линии, которая образуется сечением параболоида плоскостью Oxz, т. е. на восходящей параболе, определенной уравнениями (4) (рис. 117).

Заметим, что каждая плоскость $y=h$ пересекает гиперболический параболоид по восходящей параболе, что видно из уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2z &= \frac{x^2}{p} - \frac{h^2}{q}, \\ y &= h, \end{aligned}\right\}$$

определяющих такие сечения; одно из этих сечений, а именно, соответствующее значению $h=0$, было рассмотрено нами в первую очередь.

На рис. 117 изображен кусок гиперболического параболоида; край изображенного куска составлен из двух отрезков восходящих парабол, плоскости которых параллельны

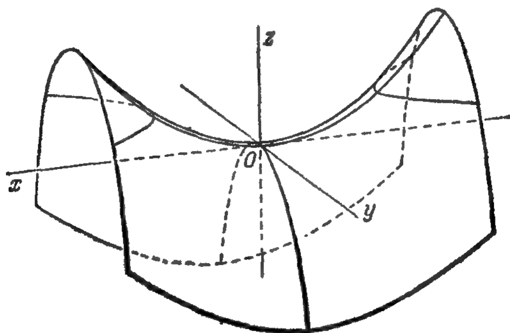


Рис. 117.

плоскости Oxz, и двух отрезков нисходящих парабол, плоскости которых параллельны плоскости Oyz.

Рассмотрим, наконец, сечения гиперболического параболоида плоскостями, параллельными плоскости Oxy. Каждая плоскость имеет уравнение $z=h$, а сечение параболоида этой плоскостью определяется уравнениями

$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} &= 2h, \\ z &= h. \end{aligned}\right\}$$

Отсюда мы видим, что плоскости $z=h$ пересекают гиперболический параболоид по гиперболам, расположенным симметрично относительно плоскостей Oxz и Oyz. Если $h>0$, то соответствующая гипербола пересекает плоскость Oxz, если $h<0$, — гипербола пересекает плоскость Oyz; при $h=0$ гипербола вырождается в пару прямых (на рис. 117 изображено одно сечение параболоида плоскостью $z=h$ для случая $h>0$).

Все изложенное позволяет заключить, что гиперболический параболоид имеет форму седла. Он обладает двумя взаимно перпендикулярными плоскостями симметрии; при данном выборе координатной системы эти плоскости совмещены с координатными плоскостями Oxz и Oyz. Точка, с которой совмещено начало координат, называется *вершиной* гиперболического параболоида; числа p, q называются его *параметрами*.

§ 72. Цилиндры второго порядка

236. В заключение нашего обзора рассмотрим уравнение второй степени, не содержащее текущей координаты z. Мы можем написать его в виде

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+ \\ +2Ey+F=0. \qquad (1)$$

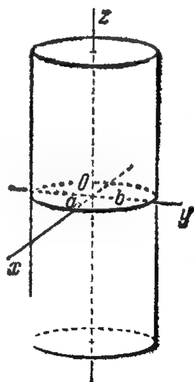


Рис. 118.

Согласно n° 193 уравнение (1) определяет цилиндрическую поверхность (или, как говорят короче, — цилиндр) с образующими, параллельными оси Oz. Поскольку уравнение (1) есть уравнение второй степени, определяемая им поверхность называется *цилиндром второго порядка*.

Заметим теперь, что уравнение (1) по существу не отличается от уравнения (1) § 41, которое в декартовых координатах на плоскости определяет линию второго порядка. Отсюда заключаем, что сечение рассматриваемого цилиндра плоскостью Oxy есть линия второго порядка. В зависимости от характера этой линии мы имеем цилиндры второго порядка следующих типов.

1) *Эллиптический цилиндр* (рис. 118); при помощи надлежащего выбора координатной системы его уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если $a=b$, то цилиндр оказывается круговым.

б) *Гиперболический цилиндр* (рис. 119); его уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

в) *Параболический цилиндр* (рис. 120); его уравнение может быть приведено к виду

$$y^2=2px.$$

Кроме того, возможен случай, когда левая часть уравнения (1) есть произведение двух множителей первой

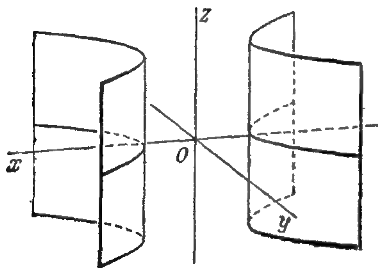


Рис. 119.

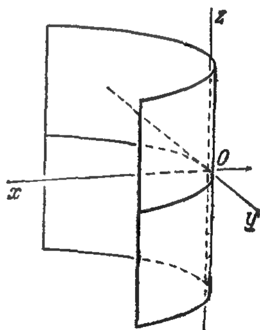


Рис. 120.

степени. Тогда цилиндр «вырождается» в пару плоскостей.

Наконец, возможно еще, что уравнение вида (1) совсем не имеет вещественных решений (например, $x^2+y^2=-1$) и, следовательно, совсем не определяет никакого геометрического образа. Относительно такого уравнения принято говорить, что оно «определяет мнимый цилиндр».

§ 73. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. Конструкции В. Г. Шухова

237. Обзор различных типов поверхностей второго порядка (см. §§ 69—72) сейчас же обнаруживает, что среди них имеются *линейчатые* поверхности, т. е. поверхности, составленные из прямых: конусы, цилиндры. Но оказывается, что кроме конусов и цилиндров линейчатыми поверхностями второго порядка являются еще однополостный гиперболоид и гиперболический параболоид. Этот факт «на взгляд» не очевиден, однако легко доказывается алгебраически. Проведем доказательство для однополостного гиперболоида.

Представим каноническое уравнение однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

в виде

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2},$$

или

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\left(1+\frac{y}{b}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right). \qquad (1)$$

Рассмотрим далее два уравнения первой степени:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y}{b}\right),\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

где α и β — некоторые числа, не равные одновременно нулю. Если α и β фиксированы, то уравнения (2) совместно определяют прямую; меняя α и β, получим бесконечную систему прямых. Заметим теперь, что, перемножая уравнения (2) почленно, мы получим уравнение (1). Отсюда следует, что каждая из этих прямых целиком лежит на однополостном гиперболоиде. В самом деле, если координаты x, y, z некоторой точки удовлетворяют двум уравнениям (2), то они удовлетворяют также уравнению (1); таким образом, каждая точка прямой, определяемой уравнениями (2) при любых α, β (не равных одновременно нулю),

лежит на рассматриваемом однополостном гиперболоиде, т. е. на нем лежит вся эта прямая.

Покажем, наконец, что через каждую точку однополостного гиперболоида проходит одна и только одна прямая из указанной системы. Пусть $M_0(x_0; y_0; z_0)$ — произвольная точка однополостного гиперболоида; так как координаты ее удовлетворяют уравнению гиперболоида, то

$$\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)=\left(1+\frac{y_0}{b}\right)\left(1-\frac{y_0}{b}\right). \qquad (3)$$

Будем искать такие числа α, β, чтобы соответствующая им прямая системы (2) проходила через точку M_0. Так как координаты точки M_0 должны удовлетворять уравнениям этой прямой, то для определения неизвестных α, β мы имеем два уравнения:

$$\left.\begin{aligned}\alpha\left(\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}\right)&=\beta\left(1+\frac{y_0}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x_0}{a}-\frac{z_0}{c}\right)&=\alpha\left(1-\frac{y_0}{b}\right).\end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Если $1+\frac{y_0}{b}\neq 0$, то из первого уравнения этой системы находим $\beta=k\alpha$, где положено

$$k=\frac{\frac{x_0}{a}+\frac{z_0}{c}}{1+\frac{y_0}{b}}. \qquad (5)$$

При $\beta=k\alpha$ также и второе уравнение системы (4) будет удовлетворено; это следует из соотношений (3) и (5). Подставим $\beta=k\alpha$ в уравнения (2), считая α каким угодно, но не равным нулю. Так как оба уравнения в каждой своей части имеют после этой подстановки множитель α, то α можно сократить. Мы получим вполне определенную пару уравнений

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{z}{c}&=k\left(1+\frac{y}{b}\right),\\ k\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=1-\frac{y}{b},\end{aligned}\right\}$$

которой соответствует одна вполне определенная прямая;

эта прямая проходит через точку M_0 (так как числа α и β выбирались с соблюдением равенств (4)).

Если же $1+\frac{y_0}{b}=0$, то формула (5) теряет смысл, но при $1+\frac{y_0}{b}=0$ непременно $1-\frac{y_0}{b}\neq 0$. В таком случае решение системы (4) можно найти, исходя из второго ее уравнения, после чего, аналогично предыдущему, можно доказать, что и в этом случае через точку M_0 проходит одна-единственная прямая системы (2).

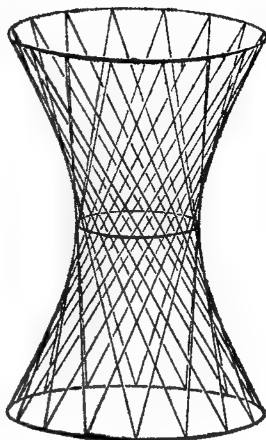


Рис. 121.

Итак, уравнения (2) при различных значениях α и β определяют бесконечную систему прямых, которые лежат на однополостном гиперболоиде и покрывают его сплошь. Эти прямые называются *прямолинейными образующими* однополостного гиперболоида.

Мы показали, что однополостный гиперболоид составлен из прямых, т. е. является линейчатой поверхностью. Но, более того, однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью. Это означает, что он обладает двумя системами прямолинейных образующих.

В самом деле, аналогично уравнениям (2) можно составить уравнения

$$\left.\begin{aligned} \alpha\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)&=\beta\left(1-\frac{y}{b}\right),\\ \beta\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)&=\alpha\left(1+\frac{y}{b}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Уравнения (6) также определяют систему прямолинейных образующих однополостного гиперболоида, причем отличную от той, которая определена уравнениями (2).

Однополостный гиперболоид с двумя системами своих прямолинейных образующих изображен на рис. 121.

238. Не вдаваясь в детали вопроса, укажем, что гиперболический параболоид

$$2z = \frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q}$$

также имеет две системы прямолинейных образующих, из которых одна определяется уравнениями

$$\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \quad \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha,$$

а другая — уравнениями

$$\alpha\left(\frac{x}{\sqrt{p}} - \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = 2\beta z, \quad \beta\left(\frac{x}{\sqrt{p}} + \frac{y}{\sqrt{q}}\right) = \alpha.$$

Изображение гиперболического параболоида с его двумя системами прямолинейных образующих дано на рис. 122.

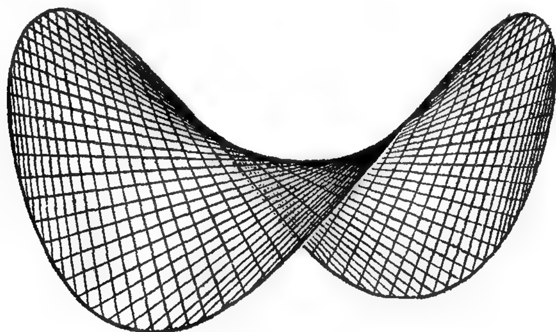


Рис. 122.

239. Знаменитому русскому инженеру Владимиру Григорьевичу Шухову принадлежит идея использования линейчатого характера однополостного гиперболоида в строительной технике. В. Г. Шухов предложил конструкции из металлических балок, расположенных так, как расположены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида (вращения). Такие конструкции оказались легкими и прочными. Они часто применяются для устройства водонапорных башен и высоких радиомачт.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ

§ 1. Определители второго порядка и системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными

1. Пусть дана квадратная таблица из четырех чисел a_1, a_2, b_1, b_2:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Число $a_1b_2 - a_2b_1$ называется определителем второго порядка, соответствующим таблице (1). Этот определитель обозначается символом $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$; соответственно имеем:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1. \tag{2}$$

Числа a_1, a_2, b_1, b_2 называются *элементами определителя*. Говорят, что элементы a_1, b_2 лежат на *главной диагонали* определителя, а элементы a_2, b_1 — на *побочной*. Таким образом, *определитель второго порядка равен разности между произведениями элементов, лежащих на главной и побочной диагоналях.*

Например,

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} = -2\cdot 3 - (-4)\cdot 5 = 14.$$

2. Покажем, как применяются определители второго порядка в задаче исследования и разыскания решений системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными.

Рассмотрим систему двух уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=h_1, \\ a_2x+b_2y=h_2 \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

с неизвестными x, y (коэффициенты a_1, b_1, a_2, b_2 и свободные члены h_1, h_2 предположим данными). Пара чисел x_0, y_0 называется *решением* системы (3), если эти числа удовлетворяют системе (3), т. е. если при замене букв x, y соответственно числами x_0, y_0 каждое из уравнений (3) становится арифметическим тождеством.

Будем разыскивать все решения системы (3); попутно мы проведем ее исследование, именно, выясним, в каких случаях система (3) имеет только одно решение, в каких случаях — более одного и в каких случаях она совсем не имеет решений. Мы употребим общеизвестный прием исключения неизвестных: умножим обе части первого уравнения на b_2, второго — на $-b_1$ и затем полученные равенства сложим почленно; тем самым неизвестное y исключается, и мы получим:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,x=b_2h_1-b_1h_2. \qquad (4)$$

Аналогично, исключая из системы (3) неизвестное x, найдем:

$$(a_1b_2-a_2b_1)\,y=a_1h_2-a_2h_1. \qquad (5)$$

Введем обозначения:

$$\left.\begin{aligned} \Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_x=\begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}, \\ \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Тогда уравнения (4) и (5) можно будет написать так:

$$\Delta\cdot x=\Delta_x, \quad \Delta\cdot y=\Delta_y. \qquad (7)$$

Определитель Δ, составленный из коэффициентов при неизвестных системы (3), называется *определителем этой системы*. Определитель Δ_x получается путем замены элементов первого столбца определителя Δ свободными членами

системы (3); определитель Δ_y получается из определителя Δ при помощи замены свободными членами системы (3) элементов второго столбца.

Предположим, что $\Delta \neq 0$. При этом условии из уравнений (7) найдем:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta},$$

или, в развернутом виде:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} h_1 & b_1 \\ h_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & h_1 \\ a_2 & h_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{8}$$

Эти формулы, очевидно, дают решение выводной системы, состоящей из уравнений (7). Они же дают решение исходной системы (3). Чтобы убедиться в этом, следует неизвестные x, y в левых частях уравнений (3) заменить по формулам (8); после такой замены (в результате «раскрытия» определителей Δ, Δ_x, Δ_y и несложных выкладок, которые легко проведет сам читатель) обнаруживается, что левая часть первого из уравнений (3) равна числу h_1, а левая часть второго из уравнений (3) — числу h_2, а это и означает, что формулы (8) определяют решение системы (3).

На основании изложенного мы можем высказать следующее утверждение: *если определитель Δ системы* (3) *не равен нулю, то система имеет единственное решение*; *оно определяется формулами* (8).

3. *Предположим теперь, что $\Delta = 0$. Если при этом хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y отличен от нуля, то система* (3) *совсем не имеет решений* (как говорят, уравнения этой системы *несовместны*).

В самом деле, если $\Delta = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y не равен нулю, то по крайней мере одно из равенств (7) является невозможным, т. е. система (7) не имеет решений. Но в таком случае и система (3) не имеет решений, так как система (7) выведена из системы (3), следовательно, каждое решение системы (3), если бы таковое имелось, было бы решением системы (7).

Если же $\Delta=0$, но вместе с тем $\Delta_x=\Delta_y=0$, то система (3) *имеет бесконечно много решений* (в этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого).

В самом деле, если $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$, т. е. если

$$a_1b_2-a_2b_1=0, \quad a_1h_2-a_2h_1=0, \quad b_1h_2-b_2h_1=0,$$

то коэффициенты при неизвестных и свободные члены данных уравнений пропорциональны. А это означает, что одно из уравнений системы получается путем умножения всех членов другого уравнения на некоторый общий множитель, т. е. в системе есть лишь одно существенное уравнение, например, $a_1x+b_1y=h_1$, другое же является его следствием. Но уравнение вида $a_1x+b_1y=h_1$ всегда имеет бесконечно много решений, поскольку одной из двух неизвестных x, y можно придавать численные значения по произволу, а вторую определять соответственно из уравнения (например, если $b_1\neq 0$, то, назначая произвольно x, мы можем определять y по формуле: $y=\frac{-a_1x+h_1}{b_1}$).

Замечание. В этих рассуждениях предполагалось, что каждое отдельно взятое уравнение системы имеет решение. Если рассматривать и такие системы, в которых содержатся противоречивые равенства, то высказанное утверждение будет неверным. Например, система:

$$\begin{gathered}0\cdot x+0\cdot y=1,\\ 0\cdot x+0\cdot y=1,\end{gathered}$$

удовлетворяет условиям: $\Delta=0$, $\Delta_x=0$, $\Delta_y=0$; однако, эта система не допускает ни одного решения.

4. Итак: *если определитель системы* (3) *не равен нулю* ($\Delta\neq 0$), *то система имеет единственное решение* (*определяемое формулами* (8)); *если $\Delta=0$, то система либо не имеет решений, либо имеет их бесконечно много.*

Пример 1. Найти все решения системы

$$\left.\begin{aligned}3x+4y&=2,\\ 2x+3y&=7.\end{aligned}\right\}$$

Решение. Подсчитаем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 2 & 3\end{vmatrix}=3\cdot 3-2\cdot 4=1.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, определяемое формулами (8). Найдем Δ_x и Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 4\cdot 7 = -22,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3\cdot 7 - 2\cdot 2 = 17.$$

Отсюда

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{-22}{1} = -22, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{17}{1} = 17.$$

Пример 2. Найти все решения системы

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 1, \\ 6x + 8y = 3. \end{array}\right\}$$

Решение. Подсчитаем определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 3\cdot 8 - 4\cdot 6 = 0.$$

Так как $\Delta = 0$, то данная система либо совсем не имеет решений, либо имеет их бесконечно много. Чтобы установить, какая именно из этих двух возможностей осуществляется, найдем Δ_x и Δ_y:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 12 = -4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 6 = 3.$$

Так как $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$, $\Delta_y \neq 0$, то данная система решений не имеет.

Замечание. К тому же выводу можно прийти сразу, если помножить все члены первого уравнения на 2 и вычесть результат почленно из второго уравнения; мы получим при этом $0 = 1$, т. е. противоречивое равенство. Следовательно, данные уравнения несовместны.

Пример 3. Найти все решения системы

$$\left.\begin{array}{l} 3x + 4y = 1, \\ 6x + 8y = 2. \end{array}\right\}$$

Решение. Коэффициенты при x, y — те же, что и в примере 2; поэтому $\Delta = 0$. Следовательно, данная система либо совсем не имеет решений, либо имеет их бесконечно много. Но, как легко заметить, второе уравнение системы есть следствие первого (получается умножением всех членов первого уравнения на 2). Таким образом, поскольку система сводится к одному уравнению, она имеет бесконечно много различных решений; мы получим их, придавая x численные значения произвольно и находя соответственные значения y по формуле

$$y = \frac{1 - 3x}{4}.$$

5. Рассмотрим, в частности, систему двух однородных уравнений с двумя неизвестными

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=0, \\ a_2x+b_2y=0, \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

т. е. систему уравнений, свободные члены которых равны нулю.

Очевидно, что такая система всегда имеет *нулевое решение*: $x=0$, $y=0$. Если $\Delta\neq 0$, то это решение является единственным; если же $\Delta=0$, то однородная система, кроме нулевого, имеет бесконечно много других решений (поскольку для однородной системы возможность отсутствия решений исключена). Эти же выводы можно сформулировать еще так: *однородная система* (9) *имеет ненулевое решение в том и только в том случае, когда* $\Delta=0$.

§ 2. Однородная система двух уравнений первой степени с тремя неизвестными

6. Займемся решением системы однородных уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z=0, \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

с тремя неизвестными x, y, z. Предположим, что

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0. \qquad (2)$$

Запишем систему (1) в виде

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y=-c_1z, \\ a_2x+b_2y=-c_2z \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

и будем считать, что неизвестной z здесь предписано какое-нибудь численное значение. При определенном численном значении z система (3) имеет единственное решение, которое мы получим, применяя формулы (8) § 1:

$$\left.\begin{aligned} x=\frac{\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \\ y=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Числа x, y вместе с числом z составляют решение заданной системы (1); *различным численным значениям z соответствуют различные решения системы* (1) (система (1) имеет бесконечно много решений, так как z можно выбирать произвольно).

Придадим формулам (4) более удобный вид. Прежде всего заметим, что

$$\begin{vmatrix} -c_1z & b_1 \\ -c_2z & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z, \qquad \begin{vmatrix} a_1 & -c_1z \\ a_2 & -c_2z \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z;$$

на основании этих равенств формулы (4) можно переписать так:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \qquad y = \frac{-\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} z}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}. \tag{5}$$

Введем обозначения:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}; \tag{6}$$

теперь из формул (5) имеем:

$$x = \frac{\Delta_1 \cdot z}{\Delta_3}, \qquad y = \frac{-\Delta_2 \cdot z}{\Delta_3}. \tag{7}$$

Обозначим $\frac{z}{\Delta_3}$ буквой t. В таком случае $z = \Delta_3 \cdot t$, а x и y согласно формулам (7) будут выражаться равенствами: $x = \Delta_1 \cdot t$, $y = -\Delta_2 \cdot t$.

Получаем *формулы*

$$x = \Delta_1 \cdot t, \quad y = -\Delta_2 \cdot t, \quad z = \Delta_3 \cdot t, \tag{8}$$

которые определяют все решения системы (1) (каждое отдельное решение получается при каком-либо определенном численном значении t).

Для практики вычислений полезно заметить, что определители Δ_1, Δ_2, Δ_3 получаются при помощи поочередного вычеркивания столбцов таблицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}.$$

7. Предыдущий вывод проводился в предположении, что $\Delta_3 \neq 0$ (см. неравенство (2)).

В случае, когда $\Delta_3 = 0$, но хотя бы один из определителей Δ_1, Δ_2 не равен нулю, вывод сводится к предыдущему переменой ролей неизвестных (если, например, $\Delta_2 \neq 0$, то следует предполагать, что произвольные численные значения предписываются неизвестной y, а x и z соответственно определяются из уравнений системы). Окончательный же результат получается тот же самый, т. е. все решения системы снова определяются формулами (8).

Если же все три определителя Δ_1, Δ_2, Δ_3 равны нулю, т. е.

$$b_1c_2 - b_2c_1 = 0, \quad a_1c_2 - a_2c_1 = 0, \quad a_1b_2 - b_1a_2 = 0,$$

то коэффициенты уравнений системы (1) пропорциональны. В этом случае одно из уравнений системы есть следствие другого: одно уравнение получается умножением всех членов другого на некоторый численный множитель. Таким образом, при $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$ система фактически сводится к одному уравнению. Такая система естественно имеет бесконечно много решений; чтобы получить какое-нибудь из них, следует *двум неизвестным* предписать произвольно численные значения, а третье найти из уравнения.

Пример 1. Найти все решения системы

$$\left.\begin{aligned} 3x + 5y + 8z = 0, \\ 7x + 2y + 4z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Согласно n°6, имеем:

$$\Delta_1 = 4, \quad \Delta_2 = -44, \quad \Delta_3 = -29.$$

Все решения данной системы определяются формулами

$$x = 4t, \quad y = 44t, \quad z = -29t,$$

где t может принимать любые значения.

Пример 2. Найти все решения системы

$$\left.\begin{aligned} 3x + 2y - 3z = 0, \\ 6x + 4y - 6z = 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение. Мы имеем $\Delta_1 = 0$, $\Delta_2 = 0$, $\Delta_3 = 0$; система содержит лишь одно существенное уравнение (второе получается почленным умножением первого на 2). Любое решение системы состоит из трех чисел x, y, z, где x, y — какие угодно, а $z = \dfrac{3x + 2y}{3}$.

§ 3. Определители третьего порядка

8. Пусть дана квадратная таблица из девяти чисел a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Определителем третьего порядка, соответствующим таблице (1), *называется число, обозначаемое символом:*

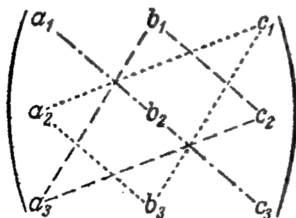
$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

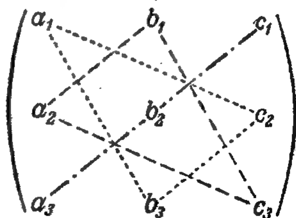
и определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \tag{2}$$

Числа a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3 называются *элементами определителя*. Элементы a_1, b_2, c_3 расположены на диагонали определителя, называемой *главной*; элементы a_3, b_2, c_1 составляют его п о б о ч н у ю диагональ.

Обратим внимание читателя на то, что первые три слагаемых в правой части равенства (2) представляют собой произведения элементов определителя, взятых по три так, как показано различными пунктирами на нижеприводимой схеме слева.





Чтобы получить следующие три члена правой части равенства (2), нужно перемножить элементы определителя по

три так, как показано различными пунктирами на той же схеме справа, после чего у каждого из найденных произведений изменить знак.

Указанное сейчас правило, называемое правилом треугольников, позволяет без напряжения памяти написать формулу (2), а также вычислить определитель третьего порядка с численно заданными элементами (без того, чтобы предварительно выписывать формулу (2)).

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 3\cdot 1\cdot(-2)+(-2)\cdot 3\cdot 2+(-2)\cdot 0\cdot 1 - $$
$$-2\cdot 1\cdot 1-3\cdot 0\cdot 3-(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=-12.$$

9. Определители широко применяются как в самой математике, так и в ее приложениях. Немного далее мы покажем применение определителей третьего порядка в вопросе исследования и решения системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными. Но сначала нам придется познакомиться с некоторыми свойствами определителей. Ряд важнейших свойств определителей сообщается в следующем n°; все пояснения, относящиеся к этим свойствам, мы будем проводить, имея в виду определители третьего порядка; однако сами свойства присущи определителям всех порядков (понятие определителя порядка выше третьего изложено в конце настоящего приложения).

10. Свойство 1. *Величина определителя не изменится, если все его строки заменить его столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером, т. е.*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Это свойство можно выразить еще так: *если поменять местами элементы определителя, расположенные симметрично относительно главной диагонали, то величина определителя останется неизменной.*

Для доказательства этого свойства достаточно применить правило треугольников к левой и правой части равенства (3) и сравнить полученные результаты.

Замечание. Свойство 1 означает равноправность строк и столбцов определителя; поэтому дальнейшие свойства определителя, присущие его столбцам и строкам, достаточно доказывать только для столбцов или только для строк.

Свойство 2. *Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению его на* -1.

Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c_1 & b_1 & a_1 \\ c_2 & b_2 & a_2 \\ c_3 & b_3 & a_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

Для доказательства равенства (4) достаточно применить правило треугольников к его левой и правой части и сравнить полученные результаты (точно так же устанавливаются аналогичные равенства, соответствующие перестановке других столбцов определителя).

Свойство 3. *Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.*

В самом деле, пусть Δ какой-нибудь определитель, имеющий два одинаковых столбца. Если мы переставим эти столбцы, то, с одной стороны, в силу свойства 2 определитель изменит знак. Но, с другой стороны, поскольку переставляемые столбцы одинаковы, их перестановка не может изменить определителя. Следовательно, $\Delta = -\Delta$, т. е. $2\Delta = 0$, или $\Delta = 0$.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 17 \\ 5 & 5 & 8 \\ 7 & 7 & 9 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 4. *Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это число k.*

Иначе это свойство можно высказать так: *общий множитель всех элементов одного столбца или одной строки определителя можно вынести за знак определителя.*

Например,

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого свойства достаточно заметить, что определитель выражается в виде суммы, каждый член которой содержит множителем один элемент из каждой строки и из каждого столбца (см. формулу (2) n° 8).

Свойство 5. *Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю.*

Это свойство есть частный случай предыдущего (при $k=0$).

Например:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 8 \\ 7 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 6. *Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.*

Это свойство следует из свойств 4 и 3. В самом деле, если элементы двух столбцов определителя пропорциональны, то элементы одного из них получаются умножением элементов другого на некоторый общий множитель. Вынося этот множитель за знак определителя, мы получим определитель с двумя одинаковыми столбцами; согласно свойству 3 он равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 10 & 5 & 9 \\ 6 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 4 & 4 & 7 \\ 5 & 5 & 9 \\ 3 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойство 7. *Если каждый элемент n-го столбца (или n-й строки) определителя представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель может быть представлен в виде суммы двух определителей, из которых один в n-м столбце (или соответственно в n-й строке) имеет первые из упомянутых слагаемых, а другой — вторые; элементы, стоящие на остальных местах, у всех трех определителей одни и те же.*

Например,

$$\begin{vmatrix} a_1' + a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Для доказательства этого равенства достаточно применить правило треугольников к определителям, записанным в его левой и правой части, и сравнить полученные результаты.

Свойство 8. *Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится.*

Свойство 8 вытекает из свойств 7 и 6; поясним это на примере. Пусть к элементам первого столбца прибавлены элементы второго столбца, умноженные на некоторое число k. Тогда согласно свойству 7 имеем:

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Второй из полученных определителей имеет два пропорциональных столбца. Следовательно, по свойству 6 он равен нулю; получаем равенство

$$\begin{vmatrix} a_1+kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2+kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3+kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

которое в данном случае и выражает указанное свойство определителя.

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятием алгебраического дополнения и минора.

§ 4. Алгебраические дополнения и миноры

11. Рассмотрим определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (1)$$

По определению (см. n° 8)

$$\Delta = a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - b_1a_2c_3 - a_1c_2b_3. \quad (2)$$

Соберем здесь члены, содержащие какой-нибудь один элемент определителя, и вынесем этот элемент за скобки; величина, остающаяся в скобках, называется *алгебраическим дополнением* этого элемента. Алгебраическое дополнение элемента мы будем обозначать большой буквой того же наименования и с тем же номером, что и буква, которой обозначен сам элемент. Например, алгебраическое дополнение элемента a_1 будет обозначаться через A_1, элемента b_1 — через B_1 и т. д.

Свойство 9. *Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (или строки) на их алгебраические дополнения.*

Иначе говоря, имеют место следующие равенства:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3, \quad \Delta = a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1, \qquad (3)$$

$$\Delta = b_1B_1 + b_2B_2 + b_3B_3, \quad \Delta = a_2A_2 + b_2B_2 + c_2C_2, \qquad (4)$$

$$\Delta = c_1C_1 + c_2C_2 + c_3C_3, \quad \Delta = a_3A_3 + b_3B_3 + c_3C_3. \qquad (5)$$

Чтобы доказать, например, первое из этих равенств, достаточно записать правую часть формулы (2) в виде

$$\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1);$$

величины, стоящие здесь в скобках, являются алгебраическими дополнениями элементов a_1, a_2, a_3, т. е.

$$b_2c_3 - b_3c_2 = A_1; \quad b_3c_1 - b_1c_3 = A_2, \quad b_1c_2 - b_2c_1 = A_3.$$

Отсюда и из предыдущего получаем:

$$\Delta = a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3,$$

что и требовалось. Остальные равенства (3—5) доказываются аналогично. Запись определителя согласно какой-нибудь из формул (3—5) называется разложением его по элементам некоторого столбца или некоторой строки (первая формула дает разложение по элементам первого столбца и т. д.).

12. *Минором* некоторого элемента определителя называется определитель, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент. Например, минором элемента a_1 определителя Δ является определитель $\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$, минором элемента b_1 является определитель $\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix}$ и т. д.

Оказывается, что *алгебраическое дополнение любого элемента определителя равняется минору этого элемента, взятому со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент, есть число четное, и с обратным знаком, если это число — нечетное.* Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, читатель должен рассмотреть алгебраические дополнения всех элементов определителя и сравнить их с минорами.

Указанное сейчас обстоятельство существенно облегчает использование формул (3—5), так как позволяет записывать алгебраические дополнения элементов определителя сразу, просто «глядя» на этот определитель. При этом еще полезно иметь в виду следующую схему:

$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix},$$

где знаком плюс помечены места тех элементов, для которых алгебраические дополнения равны минорам, взятым с их собственными знаками.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 5 & 12 & 19 \\ 3 & 9 & 17 \end{vmatrix},$$

разлагая его по элементам первой строки.

Решение.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix} 12 & 19 \\ 9 & 17 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 5 & 19 \\ 3 & 17 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 5 & 12 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 8.$$

Замечание. Вычисление определителя при помощи разложения по элементам столбца или строки можно упростить, если предварительно преобразовать этот определитель, используя свойство 8. Именно, умножая элементы некоторого столбца (или некоторой строки) на любой множитель и прибавляя их затем к элементам другого столбца (или другой строки), мы получим новый определитель, равный данному; при надлежащем выборе множителя можно добиться того, чтобы один из элементов полученного определителя оказался равным нулю. Двукратное применение такой операции может дать определитель, равный данному, у которого два элемента одной строки (или одного столбца) будут равны нулю. Вычисляя полученный определитель при помощи разложения его по элементам указанной строки (или столбца), мы должны будем подсчитать лишь один минор, так как два минора из трех умножаются на элементы, равные нулю. Так, например, вычисляя предложенный в предыдущем примере определитель Δ, преобразуем его предварительно так: прибавим к элементам

его второго столбца элементы первого столбца, умноженные на (—2), затем прибавим к элементам его третьего столбца элементы первого столбца, умноженные на (—3); мы получим:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&0&0\\5&2&4\\3&3&8\end{vmatrix}.$$

Разлагая этот определитель по элементам первой строки, находим:

$$\Delta=2\cdot\begin{vmatrix}2&4\\3&8\end{vmatrix}-0\cdot\begin{vmatrix}5&4\\3&8\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}5&2\\3&3\end{vmatrix}=8.$$

13. Здесь мы сообщим некоторые предложения, важные для решения и исследования системы уравнений первой степени с тремя неизвестными *).

Пусть дан определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1&b_1&c_1\\a_2&b_2&c_2\\a_3&b_3&c_3\end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Разложим его по элементам какой-нибудь строки или какого-нибудь столбца, например, по элементам первого столбца:

$$\Delta=a_1A_1+a_2A_2+a_3A_3. \qquad (6)$$

Заменим в правой части этого равенства числа a_1, a_2, a_3 любыми числами h_1, h_2, h_3; тогда правая часть равенства (6) будет представлять собой разложение по элементам первого столбца определителя, который получается из определителя Δ заменой элементов его первого столбца числами h_1, h_2, h_3:

$$h_1A_1+h_2A_2+h_3A_3=\begin{vmatrix}h_1&b_1&c_1\\h_2&b_2&c_2\\h_3&b_3&c_3\end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Выберем теперь в качестве h_1, h_2, h_3 элементы второго или третьего столбца данного определителя (т. е. возьмем $h_1=b_1$, $h_2=b_2$, $h_3=b_3$ или $h_1=c_1$, $h_2=c_2$, $h_3=c_3$). В таком случае определитель (7) будет иметь два одинаковых столбца и, следовательно, будет равен нулю; получаем

*) Аналогичные предложения, относящиеся к определителям высших порядков, используются для решения и исследования системы уравнений первой степени с любым числом неизвестных.

равенство

$$b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3 = 0, \tag{8}$$

или

$$c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3 = 0. \tag{9}$$

Если мы будем исходить из разложения Δ по элементам его второго столбца, то аналогичным путем получим равенства:

$$a_1B_1 + a_2B_2 + a_3B_3 = 0, \tag{10}$$

$$c_1B_1 + c_2B_2 + c_3B_3 = 0. \tag{11}$$

Исходя из разложения Δ по элементам третьего столбца, получим равенства:

$$a_1C_1 + a_2C_2 + a_3C_3 = 0, \tag{12}$$

$$b_1C_1 + b_2C_2 + b_3C_3 = 0. \tag{13}$$

Кроме того, шесть подобных равенств имеет место для строк определителя.

На основании изложенного мы можем сформулировать следующее свойство определителей:

Свойство 10. *Сумма произведений элементов какого-нибудь столбца (или какой-нибудь строки) определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (или другой строки) равна нулю.*

§ 5. Решение и исследование системы трех уравнений первой степени с тремя неизвестными

14. Рассмотрим систему трех уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= h_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= h_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= h_3 \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

с неизвестными x, y, z (коэффициенты a_1, b_1, ..., c_3 и свободные члены h_1, h_2, h_3 предположим данными).

Тройка чисел x_0, y_0, z_0 называется *решением* системы (1), если эти числа удовлетворяют уравнениям системы (1), т. е. если при замене символов x, y, z числами x_0, y_0, z_0 каждое из уравнений (1) станет арифметическим тождеством.

Займемся разысканием всех решений системы (1); попутно проведем ее исследование, именно, выясним, в каких случаях система (1) имеет только одно решение, в каких случаях — более одного, в каких случаях она совсем не имеет решений.

В последующих рассуждениях основную роль будет играть определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

составленный из коэффициентов при неизвестных; он называется *определителем данной системы.*

Будем, как и раньше, обозначать символами A_1, A_2, ... алгебраические дополнения элементов a_1, a_2, ... определителя Δ. Умножим обе части первого уравнения системы (1) на A_1, второго — на A_2, третьего — на A_3, а затем почленно сложим эти уравнения; получим:

$$(a_1A_1 + a_2A_2 + a_3A_3)\,x + (b_1A_1 + b_2A_2 + b_3A_3)\,y + \\ + (c_1A_1 + c_2A_2 + c_3A_3)\,z = (h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3).$$

Отсюда и на основании свойств 9 и 10 имеем (см. первое из равенств (3) n° 11, а также равенства (8) и (9) n° 13):

$$\Delta \cdot x = h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3. \qquad (3)$$

Аналогично найдем:

$$\Delta \cdot y = h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3, \qquad (4)$$

$$\Delta \cdot z = h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3. \qquad (5)$$

Правые части уравнений (3), (4) и (5) обозначим соответственно символами Δ_x, Δ_y, Δ_z. Тогда уравнения (3), (4), (5) примут вид

$$\Delta \cdot x = \Delta_x, \quad \Delta \cdot y = \Delta_y, \quad \Delta \cdot z = \Delta_z, \qquad (6)$$

причем, как следует из n° 13 (см., например, формулу (7) n° 13):

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} h_1 & b_1 & c_1 \\ h_2 & b_2 & c_2 \\ h_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & h_1 & c_1 \\ a_2 & h_2 & c_2 \\ a_3 & h_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & h_1 \\ a_2 & b_2 & h_2 \\ a_3 & b_3 & h_3 \end{vmatrix}. \qquad (7)$$

Полезно заметить, что определители Δ_x, Δ_y, Δ_z получаются из определителя Δ при помощи замены соответственно его

первого, второго и, наконец, третьего столбца столбцом свободных членов данной системы.

Предположим, что $\Delta \neq 0$; при этом условии из уравнений (6) находим:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{8}$$

Эти формулы, очевидно, дают решение выводной системы, состоящей из уравнений (6). Они же дают решение и исходной системы (1). Для доказательства следует подставить в уравнения системы (1) вместо x, y, z их выражения (8) и убедиться, что каждое из уравнений (1) будет удовлетворено. Выполним эту подстановку для первого уравнения; мы имеем:

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1\frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1\frac{\Delta_z}{\Delta} =$$
$$= \frac{1}{\Delta}a_1(h_1A_1 + h_2A_2 + h_3A_3) + \frac{1}{\Delta}b_1(h_1B_1 + h_2B_2 + h_3B_3) +$$
$$+ \frac{1}{\Delta}c_1(h_1C_1 + h_2C_2 + h_3C_3) = \frac{1}{\Delta}h_1(a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1) +$$
$$+ \frac{1}{\Delta}h_2(a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2) + \frac{1}{\Delta}h_3(a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3).$$

Но согласно девятому свойству определителей

$$a_1A_1 + b_1B_1 + c_1C_1 = \Delta,$$

а согласно десятому свойству

$$a_1A_2 + b_1B_2 + c_1C_2 = 0,$$
$$a_1A_3 + b_1B_3 + c_1C_3 = 0.$$

Таким образом,

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1\frac{\Delta_y}{\Delta} + c_1\frac{\Delta_z}{\Delta} = h_1,$$

т. е. числа x, y, z, определяемые формулами (8), удовлетворяют первому уравнению данной системы; совершенно аналогично доказывается, что они удовлетворяют двум остальным уравнениям.

Все изложенное позволяет сделать следующий вывод: *если* $\Delta \neq 0$, *то система* (1) *имеет единственное решение; оно определяется формулами* (8).

Пример. Дана система

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=4,\\ 3x-5y+3z&=1,\\ 2x+7y-z&=8. \end{aligned}\right\}$$

Найти все ее решения.

Решение. Подсчитаем определитель системы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1\\ 3 & -5 & 3\\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix}=33.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то данная система имеет единственное решение, которое определяется формулами (8). По формулам (7) имеем:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1\\ 1 & -5 & 3\\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix}=33, \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1\\ 3 & 1 & 3\\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix}=33,$$

$$\Delta_z=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4\\ 3 & -5 & 1\\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix}=33.$$

Следовательно, $x=1$, $y=1$, $z=1$.

15. Предположим теперь, что определитель системы (1) равен нулю: $\Delta=0$.

Если в случае $\Delta=0$ хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z отличен от нуля, то система (1) *совсем не имеет решений* (как говорят, уравнения этой системы несовместны).

В самом деле, если $\Delta=0$, но хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z не равен нулю, то по крайней мере одно из равенств (6) является невозможным, т. е. система (6) не имеет решений.

Но в таком случае и система (1) не имеет решений, так как система (6) выведена из системы (1), следовательно, каждое решение системы (1), если бы таковое имелось, было бы решением системы (6). Например, система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=2,\\ 3x+2y+2z&=1,\\ 4x+3y+3z&=4 \end{aligned}\right\}$$

не имеет решений, так как $\Delta=0$, а $\Delta_y=1\neq 0$. В том, что данные уравнения несовместны, можно убедиться и непосредственно; именно, складывая почленно первые два из них и вычитая полученный результат из последнего, мы найдем $0=1$, т. е. неправильное равенство.

Нам остается рассмотреть случай, когда $\Delta = 0$ и также $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$, $\Delta_z = 0$. Но этим случаем мы займемся немного позднее, после того, как исследуем так называемые однородные системы.

16. *Однородной* системой трех уравнений первой степени с тремя неизвестными называется система вида

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z = 0, \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0, \\ a_3x + b_3y + c_3z = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

т. е. система уравнений, свободные члены которых равны нулю. Очевидно, что такая система всегда имеет решение: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; оно называется *нулевым*. Если $\Delta \neq 0$, то это решение является единственным.

Мы докажем, что *если $\Delta = 0$, то однородная система* (9) *имеет бесконечно много ненулевых решений*. (В этом случае либо какое-нибудь одно ее уравнение является следствием двух других, либо какие-нибудь два уравнения суть следствия третьего.)

Сначала проведем доказательство, предполагая, что хотя бы один из миноров определителя Δ отличен от нуля; пусть, например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

При этом условии первые два уравнения системы (9) имеют бесконечно много совместных ненулевых решений, определяемых формулами:

$$x = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad y = -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} t, \quad z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} t \tag{10}$$

при любом значении t (см. n° 6, формулы (8)). Нетрудно убедиться, что в случае $\Delta = 0$ все эти числа удовлетворяют также и третьему уравнению системы (9). В самом деле, подставляя их вместо неизвестных в левую часть третьего уравнения системы (9), находим:

$$a_3x + b_3y + c_3z = \left(a_3\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b_3\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) t = \Delta \cdot t.$$

Мы получаем в результате подстановки нуль, так как по условию $\Delta=0$. Таким образом, формулы (10) при любом t определяют решение системы (9); если $t\neq 0$, то это решение будет ненулевое. В рассмотренном случае система имеет лишь два существенных уравнения (третье уравнение есть следствие первых двух).

Предположим теперь, что все миноры определителя Δ равны нулю; тогда любая пара уравнений (9) имеет пропорциональные коэффициенты, следовательно, как бы мы ни выбрали в системе (9) два уравнения, одно из них будет получаться умножением всех членов другого на некоторый общий множитель (в связи с этим см. n° 7). Значит, в системе (9) будет лишь одно существенное уравнение (два других будут его следствиями). Такая система, очевидно, имеет бесконечно много ненулевых решений (так как двум неизвестным можно приписывать любые численные значения, а третье находить из единственного существенного уравнения системы). Тем самым наше утверждение доказано. Полученный результат можно сформулировать следующим образом:

Однородная система (9) *имеет ненулевые решения в том и только в том случае, когда* $\Delta=0$.

Пример 1. Система

$$\left.\begin{aligned} x+2y+z&=0,\\ 3x-5y+3z&=0,\\ 2x+7y-z&=0 \end{aligned}\right\}$$

имеет только нулевое решение, так как

$$\Delta=33\neq 0.$$

Пример 2. Система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 2x+3y+2z&=0,\\ 4x+5y+4z&=0 \end{aligned}\right\}$$

имеет бесконечно много ненулевых решений, так как

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 2\\ 4 & 5 & 4 \end{vmatrix}=0.$$

Все решения определяются формулами (10), согласно которым

$$x=-t,\ y=0,\ z=t$$

при любом t.

Пример 3. Система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=0,\\ 2x+2y+2z&=0,\\ 3x+3y+3z&=0 \end{aligned}\right\}$$

также имеет бесконечно много ненулевых решений, так как $\Delta=0$. В данном случае все миноры определителя Δ равны нулю и система сводится к одному уравнению: $x+y+z=0$. Любое решение системы состоит из трех чисел: x, y, z, где x и y — какие угодно, а $z=-x-y$.

17. Вернемся к произвольной неоднородной системе

$$\left.\begin{aligned} a_1x+b_1y+c_1z&=h_1,\\ a_2x+b_2y+c_2z&=h_2,\\ a_3x+b_3y+c_3z&=h_3. \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Мы докажем, что *если $\Delta=0$ и система (1) имеет хотя бы одно решение, то она имеет бесконечно много различных решений.*

Пусть числа x_0, y_0, z_0 составляют некоторое решение системы (1); подставляя x_0, y_0, z_0 в уравнения (1) вместо неизвестных, мы получим арифметические тождества:

$$\left.\begin{aligned} a_1x_0+b_1y_0+c_1z_0&=h_1,\\ a_2x_0+b_2y_0+c_2z_0&=h_2,\\ a_3x_0+b_3y_0+c_3z_0&=h_3. \end{aligned}\right\} \quad (11)$$

Вычтем почленно тождества (11) из соответствующих уравнений (1) (первое тождество (11) вычтем из первого уравнения системы (1), второе тождество — из второго уравнения и третье тождество — из третьего уравнения); получим:

$$\left.\begin{aligned} a_1(x-x_0)+b_1(y-y_0)+c_1(z-z_0)&=0,\\ a_2(x-x_0)+b_2(y-y_0)+c_2(z-z_0)&=0,\\ a_3(x-x_0)+b_3(y-y_0)+c_3(z-z_0)&=0. \end{aligned}\right\} \quad (12)$$

Введем обозначения:

$$x-x_0=u, \quad y-y_0=v, \quad z-z_0=w. \quad (13)$$

Теперь равенства (12) перепишутся так:

$$\left.\begin{aligned} a_1u+b_1v+c_1w&=0,\\ a_2u+b_2v+c_2w&=0,\\ a_3u+b_3v+c_3w&=0. \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

Это есть однородная система трех уравнений первой степени с неизвестными u, v, w и с теми же коэффициентами при неизвестных, что и у данной системы (1). Она называется *однородной системой, соответствующей данной неоднородной системе* (1).

Так как по условию $\Delta=0$, то согласно n° 16 однородная система (14) имеет бесконечно много различных решений. Отсюда следует, что и данная система (1) имеет бесконечно много различных решений; именно вследствие равенства (13) каждому решению u, v, w системы (14) отвечает решение

$$x=x_0+u,$$
$$y=y_0+v,$$
$$z=z_0+w$$

системы (1). Тем самым наше утверждение доказано.

На основании доказанного сразу получаем следующее предложение.

Если $\Delta=0$ *и также* $\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$, *то система* (1) *либо совсем не имеет решений, либо имеет бесконечно много решений* (в последнем случае по крайней мере одно из уравнений системы будет следствием других; такая система называется *неопределенной*).

Пример 1. Система

$$\left.\begin{aligned} x+y+z&=1,\\ 2x+2y+2z&=3,\\ 3x+3y+3z&=4 \end{aligned}\right\}$$

(удовлетворяющая условиям $\Delta=0, \Delta_x=0, \Delta_y=0, \Delta_z=0$) не имеет решений.

В самом деле, даже первые два уравнения этой системы несовместны, так как, умножая первое из них на 2 и вычитая его затем почленно из второго, мы получим невозможное равенство $0=1$.

Пример 2. Система

$$\left.\begin{aligned} 3x+y-z&=1,\\ 5x+2y+3z&=2,\\ 8x+3y+2z&=3 \end{aligned}\right\}$$

(удовлетворяющая условиям $\Delta=0, \Delta_x=0, \Delta_y=0, \Delta_z=0$) имеет бесконечно много решений. В самом деле, третье уравнение этой системы является следствием первых двух, именно, получается при помощи почленного их сложения. Таким образом, данная система имеет лишь два существенных уравнения:

$$\left.\begin{aligned} 3x+y-z&=1.\\ 5x+2y+3z&=2. \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

Чтобы найти все их совместные решения, запишем систему (*) в виде

$$\left.\begin{aligned} 3x+y&=1+z, \\ 5x+2y&=2-3z \end{aligned}\right\}$$

и будем считать, что неизвестной z здесь предписано какое-нибудь численное значение. Применяя формулы (8) n° 2, найдем:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 1+\ z & 1 \\ 2-3z & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=5z, \quad y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+\ z \\ 5 & 2-3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}=1-14z.$$

Числа x, y вместе с числом z составляют решение данной системы; данная система имеет бесконечно много различных решений, так как численное значение z можно выбирать произвольно.

§ 6. Понятие определителя любого порядка

18. В общей задаче решения и исследования систем уравнений первой степени со многими неизвестными и во многих других вычислительных задачах математики приходится иметь дело с определителями n-го порядка ($n=2, 3, 4, \ldots$). Теория определителей произвольного порядка строится в общих чертах аналогично изложенной нами теории определителей третьего порядка; однако фактическое построение ее со всеми деталями требует ряда вспомогательных предложений и тем самым представляет некоторые трудности. Эта теория, как и теория систем уравнений первой степени со многими неизвестными, излагается в любом курсе высшей алгебры*).

Мы ограничимся лишь следующими указаниями:

1. Определитель порядка n задается квадратной таблицей чисел (элементов определителя), имеющей n строк и n столбцов; обозначается определитель порядка n аналогично определителям порядка 2 и 3.

2. Минором некоторого элемента определителя порядка n называется определитель порядка $n-1$, получаемый из данного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых расположен этот элемент.

3. Алгебраическое дополнение некоторого элемента определителя есть минор этого элемента, взятый со

*) См., например, «Курс высшей алгебры» А. К. Сушкевича.

своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых расположен элемент, есть число четное, и с обратным знаком, если это число — нечетное.

4. Определитель равен сумме произведений элементов какого-нибудь столбца (или строки) на их алгебраические дополнения. Тем самым вычисление определителя порядка n сводится к вычислению n определителей порядка $n-1$.

5. Все изложенные нами выше свойства определителей относятся к определителям любого порядка.

Пример. Вычислить определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 4 & 6 \\ 4 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 2 & 8 & 5 \\ 2 & 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разлагая этот определитель по элементам верхней строки, т. е. представляя его в виде суммы произведений элементов верхней строки на их алгебраические дополнения, находим:

$$\Delta=2\begin{vmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 2 & 8 & 5 \\ 8 & 7 & 3 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 3 \end{vmatrix}+4\begin{vmatrix} 4 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 8 & 3 \end{vmatrix}-6\begin{vmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 8 \\ 2 & 8 & 7 \end{vmatrix}=296.$$

Замечание. Вычисление определителя можно упростить, если предварительно воспользоваться свойством 8 (см. n° 10 и замечание в конце n° 12).